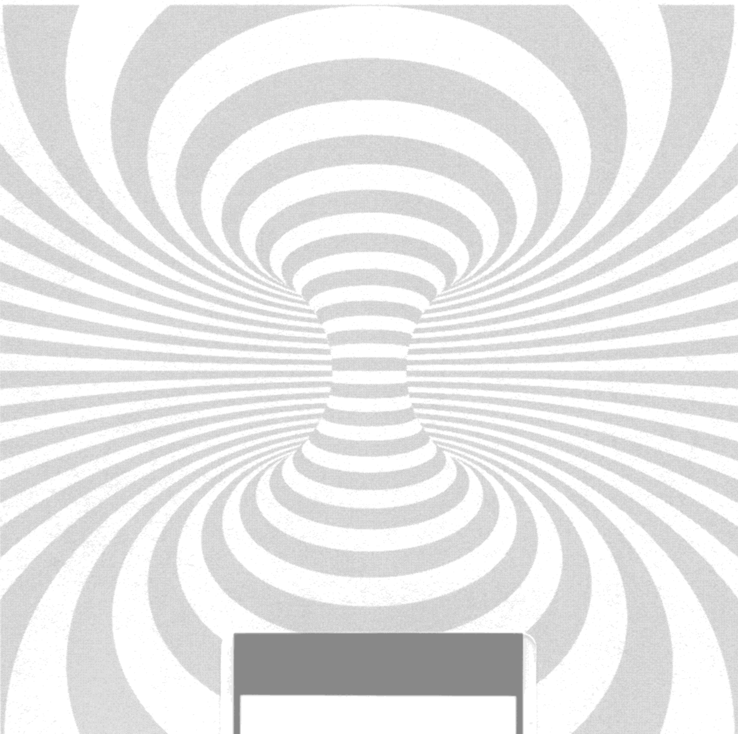
リーマン幾何学と相対性理論

岡部 洋一



プレアデス出版

まえがき

リーマン幾何学にはいろいろなところで接点があった。まず、山に登る趣味がある関係で、地図には関心が高い。そこで、球面幾何学に興味を持った。リーマン幾何学はその球面幾何学の発展形として開発されたのである。第二に、学生時代にマイクロ波を専門としていた関係で、電磁気学に携わることが多く、三次元極座標や円柱座標における div や rot の計算が多出した。ほとんどは公式で処理していたが、式の誘導を統一的に理解するのに苦労しており、それがリーマン幾何学で可能であることを、何となく知っていた。第三に、電磁気学との関連から特殊相対性理論に関心を持ち、さらに一般相対性理論にも興味を持ったが、それにはきちんとしたリーマン幾何学の理解が必要であった。こうしたいくつかの動機があり、リーマン幾何学を学び、それを Web 上で取り纏めておいたものをベースに記述したのが、本書である。

記載に当って、各概念を理解するために、いくつかの例について計算を行なってみた。物理や数学の分野はいずれもそうであるが、単に書籍を読むだけではなかなか理解できない。よく数学などで、N 次元空間を扱うことがある。いきなり N 次元空間を想像できる天才的な人もいるかも知れないが、多くの数学者は二次元ないしは三次元での

経験を十分積んでから、それを拡張しているように見受けられる。一般相対性理論も四次元であるが、それを二次元や三次元に切り出し、かつ豊富な演習を行うことが、理解の早道である。また、わからないところをいい加減にしないで、きちんと理解しておく方が、結局、早くゴールに達せることも知っておいてよいだろう。

2015 年はアインシュタインの没 60 周年であり、Web 上には、一例ということでしか記載していなかった相対性理論の部分をかなり増強した。相対的に移動している二つの座標系で、光速が同じ値になるということを合理的に説明するために空間座標と時間座標を混ぜるというのが、アインシュタインの特殊相対性理論である。その理論の構築には座標変換の手法がふんだんに使われており、前半の座標変換の記述のまとめとして最適である。

続いてアインシュタインは、重力質量と慣性質量とが一致するのは、重力が元々力ではなく、空間が曲っているからではないかと考えた。しかし、特殊相対性原理から時空の座標は対等であることを導いているので、この空間の曲がりも四次元空間の曲がりではないかと考えたのである。ここに至って、数学的な支援が必要であると考え、リーマン幾何学を学習し、それを存分に取り入れた体系を作り上げたのが、一般相対性理論である。

正に「自然は合理的に作られており、数学的にも美しくならねばならぬ」というアインシュタインの哲学のようなものを感じる。また、かなり複雑なリーマン幾何学を学んで、この壮大なる体系を作り上げたアインシュタインに敬意を払いつつ、まえがきとする。

著者

目次

第 1 章

はじめに

リーマン幾何学というと、アインシュタインが一般相対性理論を構築するにあたり利用した数学ということで知られている。しかし、リーマン幾何学は、元々球面幾何学を一般化する過程で出来上がっていった学問である。

球面幾何学で扱う座標は、地球で言えば緯度経度のことである。緯度一定の緯線と、経度一定の経線のグリッドで覆い尽すのが便利である。各地点で、緯線に平行で、かつその緯度における経度 1° の長さを持つ東向きのベクトルを緯線方向の**基底 (basis)** もしくは**基底ベクトル (base vector)** という。**単位ベクトル (unit vector)** とは長さ 1（例えば 1m）のベクトルのことを指すが、1° の経度に相当する長さは緯度により変化するため、基底という異なる用語を用いる。同様に経線方向の基底も定義できるが、その長さは緯度に依存しない。

拡大された地図では緯線同士や経線同士は、それぞれほとんど平行に描かれており、平行という概念が成立する。また、基底の長さもほとんど変化しない。しかし、地球規模で見ると、高緯度と赤道における二つの北向き基底は、三次元的に明かに平行ではない。また、東向

き基底は、赤道における東向き基底に比べ短かくなり、基底の長さの等長性も成立しない。

地球上では直線に相当する線は球の大円であり、測地線と呼ばれる。二本の大円は必ず二点で交差するから、平行線が一本も引けないことも知られている。逆に、鞍状の曲面では互いに交差しない測地線は無数に引ける。至るところ基底の長さが等しく、大域での平行性も保証されている均質な空間を**ユークリッド空間** (Euclidean space) と呼ぶ。それに対する空間を**非ユークリッド空間** (non-Euclidean space) という。球面は三次元ユークリッド空間内で定義されてはいるが、二次元空間として見れば、立派な非ユークリッド空間である。

リーマン幾何学は、こうした非ユークリッド空間を対象とした数学の分野である。対象とする空間は、局所的にはユークリッド空間であるが、大域的には非ユークリッド空間である空間を扱う。つまり、うんと拡大して見ると、基底は位置に依存せず、その結果、平行の概念も定義できるが、縮小して見ると、こうした概念が崩れるような空間を扱う。このため、局所的にはユークリッド空間の距離の概念も定義でき、他の空間への座標変換も線形写像でできることになる。本書では、前半でこうした局所的概念を説明し、最後に、その例として特殊相対性理論について記述する。

これを大域化にするには、ベクトルを与えられた空間の拘束のもとで、可能な限り平行に移動することで、空間を繋いでいく。可能な限りとは、球面上でのベクトルの平行移動を考えればよい。移動は可能であるが、球面という二次元曲面に拘束されているため、三次元的にはだんだんずれが発生する。本書の後半では、こうしたずれのあることを前提に、微分や空間の曲がりを定義していくリーマン幾何学の中核について説明し、最後に、四次元空間の曲がりが重力の成因であるとした一般性相対性理論について記述する。

第 2 章

自然基底、反変ベクトル、計量テンソル

座標系、基底、単位ベクトル、座標、距離、内積、座標変換、ベクトル、テンソル、またリーマン幾何学にとって重要な概念である計量テンソルについて紹介しよう。

2.1　自然基底と計量テンソル

リーマン幾何学 (Riemannian geometry) で扱う座標系は、デカルト**座標系 (Cartesian coordinate system)** のように[*1]、座標軸が直線で直交し、かつ座標軸の作るグリッド間隔がいずれの方向にも 1 というような単純なものだけでない。デカルト座標系とほぼ同じであるが、基底の長さが縦横で異なる**直交座標系 (orthogonal coordinate system)**、さらに座標軸が斜めに交差している**斜交座標系 (oblique coordinate**

[*1] Cartesian とはデカルト Descartes の形容詞である。

system) などがある。また、極座標系のように、座標軸が曲線である**曲線座標系** (curvilinear coordinate system) など、どんな座標系でもよい。なお、実用的な曲線座標系では座標曲線が直交している**直交曲線座標系** (orthogonal curvilinear coordinate system) が多い。

このようにリーマン幾何学ではかなり自由な座標系を対象とするが、座標値の変化に連れ、点はゆっくりと移動する、つまり連続性が保証されている空間しか対象としていない。また各点の近傍で距離が明白に定義されていることが、リーマン幾何学の大前提である。

こうした座標系の一点の座標を $(x^1, x^2, \cdots, x^N) = (\{x^m \mid m = 1, 2, \cdots, N\}) = (\{x^m\})$ と表わそう*2。1, 2, N, m などは上付きサフィックスであり、冪乗ではない。また、何故上付きサフィックスを使うかについては後述する。以下、行列表現が必要な場合には、成分をすべて並べるか、$(\{x^m\})$ のように、その成分を $(\{\cdots\})$ で囲むことにより表現する。

また各点で、特定の座標 x^m だけを 1 増加させたときの点の移動方向（接線方向）と移動距離を持つ**ベクトル** (vector) $\boldsymbol{e}_m$ を定義し、それを基底ベクトルもしくは単に**基底** (basis) と呼ぶ。本書では基底と呼ぼう。移動が直線的でない場合には、基底は微分の概念で定義される。つまり、二点間を結ぶベクトルの長さを座標の変化分で割ったものを、変化量を限りなく小さくしたもので定義する。こうしてすべての各座標変化に対応した基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_N) = (\{\boldsymbol{e}_m\})$ が得られる*3。このように、座標系のグリッドとリンクした方向と長さを持つ基底

*2 行列表現する場合、上付きサフィックスのものは縦ベクトルとして扱うことが多いので、$(x^1, x^2, \cdots, x^N)^T$ とする方がよいかも知れない。しかし、行列表現はすぐに破綻してしまうので、T は必要最小限のところにのみ付ける。

*3 行列表現する場合、下付きサフィックスのものは横ベクトルとすることが多い。この場合には縦ベクトルである基底ベクトルを横に並べる。

を**自然基底** (natural basis) と呼ぶ。

デカルト座標系では、基底は互いに直交し、かつ**単位ベクトル** (unit vector) と呼ばれる長さ 1 のベクトルとなる。二次元極座標系 (r,ϕ) では、よく知られているように、$\phi=\mathrm{const}$ の放射状の直線群と、$r=\mathrm{const}$ の円環状の曲線群が曲線座標系を構成するが、その上の任意の一点（原点以外）を中心に拡大してみると、ほぼ一定の間隔の直交する**グリッド** (grid)（格子）で構成されている。ただし、r 方向のグリッド間隔は 1 であるのに対し、ϕ 方向のグリッド間隔は r と、明かにグリッド間隔の方向依存性が存在する。したがって、ある一点におけるグリッドの接線方向を持つ 1 や r の長さのベクトルが自然基底となる。基底は、デカルト座標系を除いて、一般には単位ベクトルとは異なる概念である。基底は対象となる座標系の作るグリッドの大きさに即して長さが変化するが、単位ベクトルとはあくまでも長さ 1 のベクトルを指す。

このように座標系が歪んでいる可能性を持っていても、微小な二点を使って、ベクトルという概念が定義できる。例えば、近接した二つの座標間を結ぶベクトル $d\boldsymbol{s}$ を

$$d\boldsymbol{s}=dx^1\boldsymbol{e}_1+\cdots+dx^N\boldsymbol{e}_N=\sum_m^N dx^m\boldsymbol{e}_m$$

のように定義しよう[*4]。これを**線素ベクトル** (line element vector) という。dx^m は $d\boldsymbol{s}$ の $\boldsymbol{e}_m$ 方向の成分である。

本書では dx^m で代表されるように d の付く変数が多数現われる。d は微小の意味であるが、これは曲った座標では、離れた二点間を結ぶようなベクトルにあまり意味がなく、ほとんどのベクトルが小さい

*4 右辺は $\sum_m \boldsymbol{e}_m dx^m$ と記載してもよい。これらを行列で表現するときには、縦ベクトル、横ベクトルを意識して、$d\boldsymbol{s}=(\{\boldsymbol{e}_m\})(\{dx^m\})$ とする。

領域でしか定義できないことを示している。Δx^m などと書いてもよいが、dx^m などとすると、二つの微小量の比から、直ちに微分の概念が誘導できるなど、便利な点が多く、利用される。

やや細かい議論となるが、$\boldsymbol{e}_m$ は長さの単位を持つ。一方 dx^m は無次元の数である。例えば二次元極座標系の場合、r 方向は $dr\,\boldsymbol{e}_r$ $(= dx^1\boldsymbol{e}_1)$ であるが、$\boldsymbol{e}_r$ を 1 m、dr を 1 m がいくつ入るかの無次元数とする。一方、ϕ 方向は $d\phi\,\boldsymbol{e}_\phi$ $(= dx^2\boldsymbol{e}_2)$ として、$\boldsymbol{e}_\phi$ を 1radian 分の円弧の長さ r m の接線ベクトル、$d\phi$ を r m がいくつ入るかの無次元数とする。面白いのは、例えば、$\boldsymbol{e}_r$ を 10 cm、$\boldsymbol{e}_\phi$ を 1'（分）の円弧の長さ $2\pi r/(360 \times 60)$ m とするなど、ある程度自由に選べることである。それならば、これらをすべて 1 m の長さの単位ベクトルにすることも可能かというと、あくまでもグリッドを意識しないといけないので、$\boldsymbol{e}_\phi$ の長さをどこかの半径で 1 m にしても、他の半径では異なる長さにしなければならないのが基底の制約である。

リーマン幾何学では沢山の $\sum$ 記号が現われる。そこで**アインシュタイン規約** (Einstein convention) という便利な記法を採用しよう。これは、同じサフィックスが上下に一つずつ現れるときには、総和記号を省略するというものである。その結果、上式は次のように記載してよいことになる。

$$d\boldsymbol{s} = dx^m\boldsymbol{e}_m \tag{2.1}$$

その、長さ ds を**線素** (line element) とよぼう。その二乗は次式で与えられる。

$$ds^2 = d\boldsymbol{s}\cdot d\boldsymbol{s} = (dx^m\boldsymbol{e}_m)\cdot(dx^n\boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_n)dx^m dx^n$$

ここで、次式で定義される**計量テンソル** (metric tensor) g_{mn} と呼ばれる量[*5]を定義しよう。

---

*5 テンソルは、ここでは行列と理解しておいて欲しい。正確な意味は本章の最後

$$g_{mn} = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n \tag{2.2}$$

右辺の内積は通常の意味の内積であり、$|\boldsymbol{e}_m|$ などを自然基底の長さ（1 とは限らない）、θ をこれらベクトルの挟む角度とするとき、$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = |\boldsymbol{e}_m||\boldsymbol{e}_n| \cos\theta$ である。g_{mn} を使うと、ds^2 は次のように書くことができる。

$$ds^2 = g_{mn} dx^m dx^n \tag{2.3}$$

何故、線素の二乗がよく知られている $\sum_m (dx^m)^2$ にならないかというと、リーマン幾何学では、自然基底がいろいろな長さを持ちうるからである。したがって、g_{mn} とは、自然基底の長さや非直交の補正をしているといってよいだろう。$\boldsymbol{e}_m$ が実数ベクトルであるため、$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}_m$ が成り立ち、$(\{g_{mn}\})$ は対称行列となる[*6]。$(\{g_{mn}\})$ とは、m 行 n 列の成分が g_{mn} となる行列を意味する。

$$g_{mn} = g_{nm} \tag{2.4}$$

直交（曲線）座標系では、$\boldsymbol{e}_m$ と $\boldsymbol{e}_n$ が直交するため、非対角要素は $g_{mn} = 0$ となり、対角要素 g_{mm} は自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ の二乗長となる。その場合、基底の長さ $h_m = |\boldsymbol{e}_m|$ は[*7]**スケール因子 (scale factor)** とよばれ、$g_{mm} = h_m^2$ で与えられる。デカルト座標系ではさらに $g_{mm} = 1$ となる。

なお、特殊相対性理論では、線素は $ds^2 = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$ で定義されるが、右辺の負号は dt に吸収することも $\boldsymbol{e}_t$ に吸収するこ

の節で明かになる。

*6 複素数ベクトルの場合、$(\{g_{mn}\})$ はエルミート行列となる。

*7 基底ベクトル $\boldsymbol{e}_m$ の長さであるので e_m とすべきであるが、フォントの関係で読みづらいため h_m とした。

ともできない。また、dt^2 が大きいと、ds^2 が負になるような場合も発生する。これらについては、第 4 章で説明する。

空間の各点で定義された一般的なベクトル $\boldsymbol{A}$（微小ベクトル、速度などのように微分ベクトル、あるいは場のベクトルなど）は

$$\boldsymbol{A} = A^m \boldsymbol{e}_m \tag{2.5}$$

と成分に展開できる。これから、二つのベクトルの**内積** (inner product) という概念を導入することができる[*8]。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = (A^m \boldsymbol{e}_m) \cdot (B^n \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n) A^m B^n = g_{mn} A^m B^n \tag{2.6}$$

さらに、$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ とすることで、ベクトルの二乗長を計算することができる。

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} = (A^m \boldsymbol{e}_m) \cdot (A^n \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n) A^m A^n = g_{mn} A^m A^n \tag{2.7}$$

なお、$\boldsymbol{A} = d\boldsymbol{x}$ とすると式 2.3 が得られる。

[例 2.1] [デカルト座標系]　デカルト座標系は直交座標系であり、かつスケール因子はすべて 1 なので、次式が成立する。

$$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = \delta_{mn} \tag{2.8}$$

δ_{mn} は**クロネッカーのデルタ** (Kronecker delta) であり、$m = n$ で 1、それ以外の条件では 0 となる量である。計量テンソルは、式 2.8 左辺

[*8] 複素ベクトルの場合の内積の定義は次のようである。

$$\boldsymbol{A}^* \cdot \boldsymbol{B} = (A^m \boldsymbol{e}_m)^* \cdot (B^n \boldsymbol{e}_n) = (\boldsymbol{e}_m{}^* \cdot \boldsymbol{e}_n) A^{m*} B^n = g_{mn} A^{m*} B^n$$

$g_{mn} = \boldsymbol{e}_m{}^* \cdot \boldsymbol{e}_n$ がエルミートテンソルであるので、$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A}$ は常に実数となる。

で定義されるため、$g_{mn} = \delta_{mn}$ となる。たとえば、二次元のデカルト座標系での g_{mn} を行列で書けば、

$$\left(\{g_{mn}\}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \ (= \mathrm{diag}(1,1)) \tag{2.9}$$

diag は非対角要素がすべて 0 の対角行列を意味し、括弧内の要素を順に対角要素として持つ。今後多用するので慣れてほしい。

座標系を $(x, y, \cdots)$ とすると、任意の線素ベクトル（大きくてもよい）は次式で与えられる。

$$d\boldsymbol{s} = dx\,\boldsymbol{e}_x + dy\,\boldsymbol{e}_y + \cdots$$

計量テンソルを利用すると、線素はピタゴラスの定理にしたがい、次式で与えられる。

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \cdots = \delta_{mn} dx^m dx^n \tag{2.10}$$

[例 2.2] [直交座標系]　座標軸が直交し、かつ各基底 $(\boldsymbol{e}_x, \boldsymbol{e}_y, \cdots)$ のスケール因子（長さ）が $(h_x, h_y, \cdots)$ のような座標系では、g_{mn} は次式で与えられる。

$$g_{mn} = \mathrm{diag}(h_x^2, h_y^2, \cdots) \tag{2.11}$$

また線素は次式を満す。

$$ds^2 = dx^2 h_x^2 + dy^2 h_y^2 + \cdots = \sum_m h_m^2 (dx^m)^2 \tag{2.12}$$

[例 2.3] [二次元極座標系]　二次元極座標系では、r 一定の線は曲線となり、任意の二点を結ぶベクトルは簡単な式では与えられない。しかし、微小な領域に限れば、$\boldsymbol{e}_r$ を動径方向の単位ベクトル、$\boldsymbol{e}_\phi$ を円

弧方向の接線方向を持つ長さ r のベクトルとして、線素ベクトルは次式で与えられる（何故こうなるかは、次節で明かになる）。

$$d\boldsymbol{s} = dr\,\boldsymbol{e}_r + d\phi\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{2.13}$$

基底は直交し、スケール因子は $(1, r)$ であるので、

$$\big(\{g_{mn}\}\big) = \mathrm{diag}(1, r^2) \tag{2.14}$$

また、二次元極座標系の線素は次式を満す。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{2.15}$$

[例 2.4] [三次元極座標系]　三次元極座標系の線素ベクトルは次式で与えられる。

$$d\boldsymbol{s} = dr\,\boldsymbol{e}_r + d\theta\,\boldsymbol{e}_\theta + d\phi\,\boldsymbol{e}_\phi \tag{2.16}$$

基底は直交し、スケール因子は $(1, r, r\sin\theta)$ であるので、

$$\big(\{g_{mn}\}\big) = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta) \tag{2.17}$$

また線素は次式を満す。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta\,d\phi^2 \tag{2.18}$$

2.2　座標変換

元の座標系の上に張られた別の座標系の座標を $(\{x^{\mu'}\,|\,\mu' = 1', 2', \cdots\}) = (\{x^{\mu'}\})$ とし、これらは元の座標系の座標の滑らかな関数で与えられるとする。多くの書では、新座標系にはプライムを

x'^{μ} のように付すが、本書では、新座標系のサフィックスそのものにプライムを付けることにする。さらにサフィックスが変数である場合には、ギリシャ文字にすることにして区別する。元の座標系のサフィックスはローマンとする。ここでも、サフィックスの上付き、下付きがあるが、その区別の説明はもう少し先まで待ってほしい。

新たな座標系の方も、デカルト座標系でも直線座標系でも曲線座標系でも構わない。例えば、曲線座標系の場合、$x^{\mu'} = \cdots, -1, 0, 1, \cdots$ といった等座標線（三次元だと面）を引き、それらによって作られるグリッド（一般には微小な斜方形や斜方体）に対応して自然基底 $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ を定義する。したがって、一般には、基底の長さや方向は場所によってどんどん変化する。

まず、$x^{\mu'}$ を元座標 $\{x^m | m = 1, 2, \cdots\}$ の関数とみなして、全微分 $dx^{\mu'}$ を求めよう。

$$dx^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m} dx^m \tag{2.19}$$

右辺は m による総和である。分母の上付きは分数全体の下付きとみなすことになっているので、ここでもアインシュタイン規約を用いている。$dx^{\mu'}$ と dx^m の関係が線形であるとき、その変換を**アフィン変換** (affine transform) と言う。偏微分商 $\partial x^{\mu'}/\partial x^m$ は場所によって緩やかに変化していくので、局所的にはアフィン変換と言えるが、大局的にはアフィン変換ではない。

$\partial x^{\mu'}/\partial x^m$ はしばしば $\partial_m x^{\mu'}$ と略記されるが、本書ではこれをさらに簡略化し、$\partial^{\mu'}_m$ と略記することにしよう。

$$dx^{\mu'} = \partial^{\mu'}_m dx^m \tag{2.20}$$

元の座標系の成分から新しい座標系の成分へ**変換** (transform) することを**順変換** (forward transform) と呼び、こうした座標変換に現われ

る係数を $\partial^{\mu'}_m$ を**変換係数** (transform coefficient) と呼ぶ。

式 2.19 や式 2.20 は行列 $(\{\partial^{\mu'}_m\})$ を使って[*9]書き表わすことができる。例えば、式 2.20 は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{dx^{\mu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right)\left(\{dx^m\}\right) \\
= \begin{pmatrix} dx^{1'} \\ \vdots \\ dx^{N'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial^{1'}_1 & \cdots & \partial^{1'}_N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^{N'}_1 & \cdots & \partial^{N'}_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx^1 \\ \vdots \\ dx^N \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.21}
$$

プライムのついた方の数字が μ' に対応することは、容易に想像できるであろう。この変換係数からなる行列は**ヤコビ行列** (Jacobian matrix) とも言われる。

x^m が $\{x^{\mu'}|\mu' = 1', 2', \cdots\}$ の関数であるとみなすこともできる。その場合には全微分 dx^m は偏微分商 $\partial^m_{\mu'}$ を利用して、次式のようになる。

$$
dx^m = \partial^m_{\mu'} dx^{\mu'} \tag{2.22}
$$

これが dx^m の**逆変換** (reverse transform) である。順変換の変換係数は $\partial^{\mu'}_m$、逆変換は $\partial^m_{\mu'}$ で混乱しそうであるが、例えば直前の式で右辺にある $dx^{\mu'}$ の上付きのサフィックス μ' を、変換係数 $\partial^m_{\mu'}$ の下付きサフィックス μ' で打ち消して別の上付きサフィックス m にして、左辺の dx^m の上付きサフィックス m に渡していると理解すれば、容易に覚えられる（サフィックスの上下の重要性が理解できよう）。

ベクトルそのものは元の座標系でも新しい座標系でも不変である。例えば、$d\boldsymbol{x}$ を、変換先の自然基底 $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ で展開しよう。

$$
d\boldsymbol{x} = dx^{\mu'}\boldsymbol{e}_{\mu'} \quad (= dx^m \boldsymbol{e}_m) \tag{2.23}
$$

[*9] サフィックスが上下にある場合、原則、上を行、下を列に対応させることとする。

この式の括弧内の dx^m に式 2.22 を代入し、両辺から $dx^{\mu'}$ を消去すると、変換先の自然基底 $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ を生成する式を得ることができる。

$$\boldsymbol{e}_{\mu'} = \partial^m_{\mu'} \boldsymbol{e}_m \tag{2.24}$$

この式は $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ を $\boldsymbol{e}_m$ で展開した形にもなっており、$\partial^m_{\mu'}$ は、その展開成分であることがわかる。注意して欲しいのは、これは基底ベクトルの座標変換をやっているのではなく、元の座標系 $\boldsymbol{e}_m$ の基底から順方向に新しい座標系における基底 $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ を「生成」しているのである。またその際には、座標の逆変換の係数 $\partial^m_{\mu'}$ が使われている。

逆に $dx^{\mu'}$ に式 2.20 を代入し、両辺から dx^m を消去すると、元の座標系の自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ を変換先の自然基底で展開したときの式を得ることができる。

$$\boldsymbol{e}_m = \partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}_{\mu'} \tag{2.25}$$

この場合、座標の順変換の変換係数が使われる。ここでも、サフィックスの上下に着目すればいずれの変換係数を使うべきかがわかる。

ベクトルの座標変換の際、基底ベクトルの生成則（変換則ではない）と同じ変換係数 $\partial^m_{\mu'}$ で順変換されることを**共変** (covariant) と呼ぶ。また、座標ベクトルの変換則と同じ変換係数 $\partial^{\mu'}_m$ により順変換されることを**反変** (contravariant) と呼ぶ。

そこで反変ベクトル dx^m の変換という視点では、$\partial^{\mu'}_m$ は**反変順変換係数** (contravariant forward transform coefficient)、$\partial^m_{\mu'}$ は**反変逆変換係数** (contravariant reverse transform coefficient) となる。一方、共変的な基底 $\boldsymbol{e}_m$ の生成という視点では、$\partial^{\mu'}_m$ が**共変逆変換係数** (covariant reverse transform coefficient)、$\partial^m_{\mu'}$ が**共変順変換係数** (covariant forward transform coefficient) ということになる。同じ量に二つの名前を付けるのは混乱するので、基本的には反変の変換係数で呼ぶこととする。

リーマン幾何学では、反変の量のサフィックスは上付きにし、共変の量のサフィックスは下付きにするという規則がある。これで、何故 dx^m は上付きとなるかが分ったであろう。$\boldsymbol{e}_m$ と $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ については変換ではなく生成であるが、たまたま、共変的な式で結び付けられるため、下付きサフィックスを付けている。さらにアインシュタイン規約では、同じサフィックスが上下に現われたときのみ、総和記号 $\sum$ を省略できるとなっているが、今迄の式を振り返って、改めてこれらの事実を確かめるのもよいだろう。

なお、今後度々現われる変換係数に関る次の式を確認しておこう。一言でいえば、順変換して逆変換すれば元へ戻る、逆変換して順変換すれば元へ戻るということである[*10]。

$$
\begin{aligned}
\partial^n_{\mu'}\partial^{\mu'}_m &= \frac{\partial x^n}{\partial x^{\mu'}}\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^m} = \frac{dx^n}{dx^m} = \delta^n_m \\
\partial^{\nu'}_m\partial^m_{\mu'} &= \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} = \frac{dx^{\nu'}}{dx^{\mu'}} = \delta^{\nu'}_{\mu'}
\end{aligned}
\tag{2.26}
$$

つまり、反変順変換係数と反変逆変換係数は、互いに逆行列の関係にある。

続いて計量テンソル g_{mn} の変換則を求めよう。

$$
\begin{aligned}
g_{\mu'\nu'} &= \boldsymbol{e}_{\mu'}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu'} = (\partial^m_{\mu'}\boldsymbol{e}_m)\cdot(\partial^n_{\nu'}\boldsymbol{e}_n) = \partial^m_{\mu'}\partial^n_{\nu'}(\boldsymbol{e}_m\cdot\boldsymbol{e}_n) \\
&= \partial^m_{\mu'}\partial^n_{\nu'}g_{mn}
\end{aligned}
\tag{2.27}
$$

つまり、g_{mn} は二つのサフィックスに依存しているが、各サフィックスごとに共変的な変換を受ける。

一般に、二つのサフィックスを持ち、それぞれがベクトルの成分と同様に変換される（共変でも反変でも両者が混ざっていてもよい）量

[*10] δ^n_m や今後現われる δ^{mn} はいずれもクロネッカーのデルタである。

を持つものを**テンソル** (tensor) と呼ぶ。g_{mn} は、二つのサフィックスとも共変変換を受けることから、テンソルの共変成分と呼ばれる。なお、上式より $(\{g_{mn}\})$ が対称行列なので、$(\{g_{\mu'\nu'}\})$ も対称行列であることが誘導できる。

$$
\begin{aligned}
g_{mn} &= \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = (\partial_m^{\mu'} \boldsymbol{e}_{\mu'}) \cdot (\partial_n^{\nu'} \boldsymbol{e}_{\nu'}) = \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} (\boldsymbol{e}_{\mu'} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu'}) \\
&= \partial_m^{\mu'} \partial_n^{\nu'} g_{\mu'\nu'}
\end{aligned}
\tag{2.28}
$$

計量テンソル g_{mn} の変換則を使うと、線素の二乗 ds^2 の変換則もただちに得られる。

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= g_{\mu'\nu'} dx^{\mu'} dx^{\nu'} = (\partial_{\mu'}^m \partial_{\nu'}^n g_{mn})(\partial_k^{\mu'} dx^k)(\partial_l^{\nu'} dx^l) \\
&= (\partial_{\mu'}^m \partial_k^{\mu'})(\partial_{\nu'}^n \partial_l^{\nu'}) g_{mn} dx^k dx^l = \delta_k^n \delta_l^m g_{mn} dx^k dx^l \\
&= g_{mn} dx^m dx^n \quad (= ds^2)
\end{aligned}
\tag{2.29}
$$

つまり線素の二乗は座標変換に対し変化しない**不変量** (invariant) であることがわかる。実は、リーマン幾何学はこの不変量である線素の二乗を利用して形成された学問分野である。

[例 2.5] [二次元直交座標系]　(x', y') 座標の基底 $\boldsymbol{e}_{x'}$ のデカルト座標系 (x, y) 上の成分を $(a, 0)$、$\boldsymbol{e}_{y'}$ の成分を $(0, b)$ とすると、次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{x'} &= \partial_{x'}^x \boldsymbol{e}_x + \partial_{x'}^y \boldsymbol{e}_y = a\, \boldsymbol{e}_x \\
\boldsymbol{e}_{y'} &= \partial_{y'}^x \boldsymbol{e}_x + \partial_{y'}^y \boldsymbol{e}_y = b\, \boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
\tag{2.30}
$$

ここに表われた係数は反変逆変換係数であるので、行列で表現すると次のようになる。

$$
(\{\partial_{\mu'}^m\}) = \begin{pmatrix} \partial_{x'}^x & \partial_{y'}^x \\ \partial_{x'}^y & \partial_{y'}^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}
\tag{2.31}
$$

また反変順変換係数は、この逆行列で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{\partial^{\mu'}_{m}\}\right) &= \begin{pmatrix} \partial^{x'}_{x} & \partial^{x'}_{y} \\ \partial^{y'}_{x} & \partial^{y'}_{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ab}\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.32}
$$

dx^m の順変換は、反変順変換係数を利用して次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{dx^{\mu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{\mu'}_{m}\}\right)\left(\{dx^{m}\}\right) \\
= \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1/a & 0 \\ 0 & 1/b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

また逆変換は、反変逆変換係数を利用して次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{dx^{m}\}\right) &= \left(\{\partial^{m}_{\mu'}\}\right)\left(\{dx^{\mu'}\}\right) \\
= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.34}
$$

$g_{\mu'\nu'}$ の値は、スケール因子が (a, b) であることから自明であるが、デカルト座標系の $g_{mn} = \delta_{mn}$ からも計算することができる[*11]。

$$
\begin{aligned}
\left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{m}_{\mu'}\}\right)^{T}\ \left(\{g_{mn}\}\right)\ \left(\{\partial^{n}_{\nu'}\}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}^{T}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \mathrm{diag}(a^2, b^2)
\end{aligned} \tag{2.35}
$$

行列の右肩の T は転置を意味し、縦横を転置する。この結果から線素は次のように誘導される。

$$
ds'^2 = a^2\, dx'^2 + b^2\, dy'^2 \tag{2.36}
$$

---

*11 g_{mn} のようにサフィックス二つが同じ側に付いたものを行列に対応させると、行列表記には各所に転置が必要となる。多くの場合、こうした行列より前の行列やベクトルを転置すればよいが、心配な場合には、ある特定の行と列のある成分を計算したものを比較して確認する方がよい。

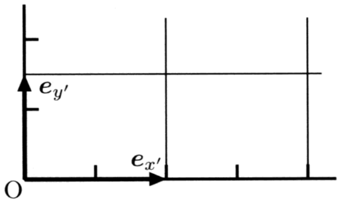


図 2.1　直交座標系のメッシュをデカルト座標系の上に記載
（$\boldsymbol{e}_{x'} = 2\,\boldsymbol{e}_x$、$\boldsymbol{e}_{y'} = 1.5\,\boldsymbol{e}_y$）

これらの関係を図で表わすとすると、どのようにするのが直感的であろうか。(x', y') 座標系に $x = \text{const}$、$y = \text{const}$ の曲線（この場合には直線）を描く、あるいは、逆に (x, y) 座標系に $x' = \text{const}$、$y' = \text{const}$ の曲線（この場合には直線）を描くのがよいだろう。デカルト座標系では基底の長さが 1 であるので、恐らく、後者の方が直感的であろう。その立場で描いたのが図 2.1 である。

[例 2.6] [二次元斜交座標系]　二次元のデカルト座標系に作られた斜交座標系を扱おう。(x', y') 座標系の基底 $\boldsymbol{e}_{x'}$ のデカルト座標系 (x, y) 上の成分を (a, b)、$\boldsymbol{e}_{y'}$ の成分を (c, d) とすると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{x'} &= a\,\boldsymbol{e}_x + b\,\boldsymbol{e}_y = \partial^x_{x'}\boldsymbol{e}_x + \partial^y_{x'}\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_{y'} &= c\,\boldsymbol{e}_x + d\,\boldsymbol{e}_y = \partial^x_{y'}\boldsymbol{e}_x + \partial^y_{y'}\boldsymbol{e}_y \end{aligned} \tag{2.37}$$

ここに表われた係数は反変逆変換係数であるので、行列で表現すると次のようになる。

$$(\{\partial^m_{\mu'}\}) = \begin{pmatrix} \partial^x_{x'} & \partial^x_{y'} \\ \partial^y_{x'} & \partial^y_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \tag{2.38}$$

また反変順変換係数は、この逆行列で与えられる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) &= \begin{pmatrix} \partial^{x'}_x & \partial^{x'}_y \\ \partial^{y'}_x & \partial^{y'}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.39}
$$

dx^m の順変換は、反変順変換係数を利用して次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{dx^{\mu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right)\left(\{dx^m\}\right) \\
= \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial^{x'}_x & \partial^{x'}_y \\ \partial^{y'}_x & \partial^{y'}_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.40}
$$

また逆変換は、反変逆変換係数を利用して次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{dx^m\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)\left(\{dx^{\mu'}\}\right) \\
= \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial^x_{x'} & \partial^x_{y'} \\ \partial^y_{x'} & \partial^y_{y'} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx' \\ dy' \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.41}
$$

$g_{\mu'\nu'}$ の値は、デカルト座標系の $g_{mn} = \delta_{mn}$ から計算することができる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{mn}\}\right) \left(\{\partial^n_{\nu'}\}\right) \\
&= \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ac+bd \\ ac+bd & c^2+d^2 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

この結果からわかるように、線素は簡単な形にはならない。

$$
ds'^2 = (a^2+b^2)\,dx'^2 + 2(ac+bd)\,dx'\,dy' + (c^2+d^2)\,dy'^2 \tag{2.43}
$$

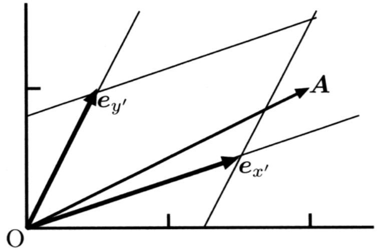


図 2.2　斜交座標系のメッシュをデカルト座標系の上に記載
（$\boldsymbol{e}_{x'} = 1.5\boldsymbol{e}_x + 0.5\boldsymbol{e}_y$、$\boldsymbol{e}_{y'} = 0.5\boldsymbol{e}_x + 1\boldsymbol{e}_y$）

具体例として、基底を以下のようにしたときの斜交座標系を図 2.2 に示す。反変逆変換係数は

$$(\{\partial^m_{\mu'}\}) = \begin{pmatrix} \partial^x_{x'} & \partial^x_{y'} \\ \partial^y_{x'} & \partial^y_{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix} \tag{2.44}$$

また、反変順変換係数は

$$\begin{aligned}(\{\partial^{\mu'}_m\}) = \begin{pmatrix} \partial^{x'}_x & \partial^{x'}_y \\ \partial^{y'}_x & \partial^{y'}_y \end{pmatrix} &= \frac{1}{1.25}\begin{pmatrix} 1 & -0.5 \\ -0.5 & 1.5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{2.45}$$

したがって、図に示した $(\{A^m\}) = (2, 1)^T$ のベクトル $\boldsymbol{A}$ は、斜交座標系では

$$\begin{pmatrix} A^{x'} \\ A^{y'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.4 \end{pmatrix} \tag{2.46}$$

となるが、その結果は図からも読み取れよう。

計量テンソルは式 2.42 より、次のようになる。

$$\left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) = \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{mn}\}\right) \left(\{\partial^n_{\nu'}\}\right) = \begin{pmatrix} 2.5 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25 \end{pmatrix} \tag{2.47}$$

[例 2.7] [二次元極座標系]　$(\{x^{\mu'}\}) = (r, \phi)$ を、二次元デカルト座標系 $(\{x^m\}) = (x, y)$ の上に考えよう。なお、ここで極座標系の変数にはプライムを付けるべきであるが、元座標系の変数と明かに差別がつくので、省略する。この間の（逆）変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \end{aligned} \tag{2.48}$$

これより、反変逆変換係数 $\partial^m_{\mu'}$（m 行 μ' 列）が得られる。

$$\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) = \begin{pmatrix} \partial^x_r & \partial^x_\phi \\ \partial^y_r & \partial^y_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \tag{2.49}$$

また、次の順変換式が成立する。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2 + y^2} \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{2.50}$$

これから反変順変換係数の行列 $(\{\partial^{\mu'}_m\})$（μ' 行 m 列）は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) &= \begin{pmatrix} x/\sqrt{x^2+y^2} & y/\sqrt{x^2+y^2} \\ -y/(x^2+y^2) & x/(x^2+y^2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi/r & \cos\phi/r \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.51}$$

反変順変換係数 $(\{\partial^{\mu'}_m\})$ は反変逆変換係数 $(\{\partial^m_{\mu'}\})$ の逆行列としても得られ、その方が簡単である。

これらの変換係数から、次の基底に関する各式が得られる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -r\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y \end{aligned} \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_x &= \cos\phi\,\boldsymbol{e}_r - (\sin\phi/r)\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_y &= \sin\phi\,\boldsymbol{e}_r + (\cos\phi/r)\,\boldsymbol{e}_\phi \end{aligned} \tag{2.53}$$

$g_{\mu'\nu'}$ の値はこの場合、デカルト座標系である $g_{mn} = \delta_{mn}$ から計算できる。

$$\begin{aligned} \left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{mn}\}\right) \left(\{\partial^n_{\nu'}\}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \\ &= \mathrm{diag}(1, r^2) \end{aligned} \tag{2.54}$$

これから、二つの自然基底 $\boldsymbol{e}_r$ および $\boldsymbol{e}_\phi$ は互いに直交し、かつそれぞれの長さは 1 と r であることがわかる。

また、$g_{\mu'\nu'}$ から線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2 \tag{2.55}$$

[例 2.8] [三次元極座標系]　$(\{x^{\mu'}\}) = (r, \theta, \phi)$ を、三次元デカルト座標系 $(\{x^m\}) = (x, y, z)$ の上に考えよう。この間の（逆）変換式は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\phi \\ y &= r\sin\theta\sin\phi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned} \tag{2.56}$$

これより、反変逆変換係数 $\partial^m_{\mu'}$（m 行 μ' 列）が得られる。

$$\begin{aligned} \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) &= \begin{pmatrix} \partial^x_r & \partial^x_\theta & \partial^x_\phi \\ \partial^y_r & \partial^y_\theta & \partial^y_\phi \\ \partial^z_r & \partial^z_\theta & \partial^z_\phi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & r\cos\theta\cos\phi & -r\sin\theta\sin\phi \\ \sin\theta\sin\phi & r\cos\theta\sin\phi & r\sin\theta\cos\phi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.57}$$

また、次の順変換式が成立する。

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2} \\ \theta &= \tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z} \\ \phi &= \tan^{-1}\frac{y}{x} \end{aligned} \tag{2.58}$$

これから反変順変換係数の行列 $(\{\partial^{\mu'}_m\})$（μ' 行 m 列）は次のようになる。

$$\begin{aligned} \left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) &= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} & \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \\ \frac{xz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{yz}{(x^2+y^2+z^2)\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{-(x^2+y^2)}{(x^2+y^2+z^2)} \\ \frac{-y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi/r & \cos\theta\sin\phi/r & -\sin\theta/r \\ -\sin\phi/r\sin\theta & \cos\phi/r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{2.59}$$

反変順変換係数 $(\{\partial^{\mu'}_m\})$ は反変逆変換係数 $(\{\partial^m_{\mu'}\})$ の逆行列としても得られ、その方が簡単である。

これらの変換係数から、次の基底に関する各式が得られる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_r &= \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y + \cos\theta\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\theta &= -r\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y - r\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -r\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y \\ \boldsymbol{e}_x &= \sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_r + (\cos\theta\cos\phi/r)\,\boldsymbol{e}_\theta - (\sin\phi/r\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_y &= \sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_r + (\cos\theta\sin\phi/r)\,\boldsymbol{e}_\theta + (\cos\phi/r\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \boldsymbol{e}_z &= \cos\theta\,\boldsymbol{e}_r - (\sin\theta/r)\,\boldsymbol{e}_\theta \end{aligned} \tag{2.60}$$

$g_{\mu'\nu'}$ の値はこの場合、デカルト座標系である $g_{mn} = \delta_{mn}$ から計算できる。

$$\begin{aligned} \left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{mn}\}\right) \left(\{\partial^n_{\nu'}\}\right) \\ &= \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta) \end{aligned} \tag{2.61}$$

これから、三つの自然基底 $\boldsymbol{e}_r$、$\boldsymbol{e}_\theta$ および $\boldsymbol{e}_\phi$ は互いに直交し、かつそれぞれの長さは 1、r、$r\sin\theta$ であることがわかる。

また、$g_{\mu'\nu'}$ から線素は次式で与えられる。

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{2.62}$$

[例 2.9] [球面幾何学]　**球面幾何学 (spherical geometry)** とは、三次元デカルト空間に置かれた半径 a の球面に拘束された二次元空間を扱う幾何学である。その上の位置は、緯度経度に対応する二次元の座標で表わす。元々、リーマン幾何学は、球面幾何学を一般化したものであるので、これについて議論しよう。

球面幾何学の座標は、三次元空間に置かれた球面という部分空間の上で定義されている二次元座標系であり、この二つの空間の座標系の次元は明かに異なる。本書では、このような場合、次元の大きい方の座標系を x^M のような大文字のサフィックスを用いて、区別することとする。今、元の空間を x^M、部分空間を $x^{\mu'}$ とし、前者の空間の次元の方が大きいとしよう。このとき、x^M を $x^{\mu'}$ の関数として与えるのは簡単であるが、逆に $x^{\mu'}$ を x^M の関数として得るには、x^M に何らかの制約条件を付けない限り不可能である。しかし、部分空間側に適切な独立な変数を追加して、三次元にすれば、相互に変換可能となる。例えば、球面座標系 (θ, ϕ) に r を追加すればよい。以後の議論でこのようなテクニックを使うことがあるので、若干記憶しておいてほしい。なお、$\partial^M_{\mu'}$ の計算は M の次元数が μ' の次元数より大きいからできることに注意してほしい。

球面上の座標は、三次元極座標のうち r を一定値 a に固定したものとして、(θ, ϕ) とする。これらの値を与えると、三次元デカルト座標は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
x &= a\sin\theta\cos\phi \\
y &= a\sin\theta\sin\phi \\
z &= a\cos\theta
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

したがって反変順変換係数 $\partial^M_{\mu'}$ は次式で与えられる。

$$
\left(\{\partial^M_{\mu'}\}\right) = \begin{pmatrix} \partial^x_\theta & \partial^x_\phi \\ \partial^y_\theta & \partial^y_\phi \\ \partial^z_\theta & \partial^z_\phi \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
\tag{2.64}
$$

また、基底は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_\theta &= a\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + a\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y - a\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\
\boldsymbol{e}_\phi &= -a\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y
\end{aligned}
\tag{2.65}
$$

反変逆変換係数 $\partial^{\mu'}_M$ は、次元が不足のため計算できない。

$g_{\mu'\nu'}$ は $\boldsymbol{e}_{\mu'}\cdot\boldsymbol{e}_{\nu'}$ からも計算できるが、デカルト座標系である $g_{MN}=\delta_{MN}$ から、座標変換によっても計算できる。

$$
\begin{aligned}
&\left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) = \left(\{\partial^M_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{MN}\}\right) \left(\{\partial^N_{\nu'}\}\right) \\
&= a^2 \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\phi & -\sin\theta\sin\phi \\ \cos\theta\sin\phi & \sin\theta\cos\phi \\ -\sin\theta & 0 \end{pmatrix} \\
&= a^2\,\mathrm{diag}(1, \sin^2\theta)
\end{aligned}
\tag{2.66}
$$

この結果からわかるように、計量テンソルは元の座標系の次元数ではなく、球面に拘束された緯度経度の二次元という次元を持つ。したがって、この瞬間、元の座標系の持つ三次元空間という概念は消滅したと言っても過言ではなかろう。なお、二つの自然基底 $\boldsymbol{e}_\theta$ および $\boldsymbol{e}_\phi$ の長さはそれぞれ a と $a\sin\theta$ で、かつ互いに直交していることがわかる。

また、$g_{\mu'\nu'}$ から線素は次式で与えられる。

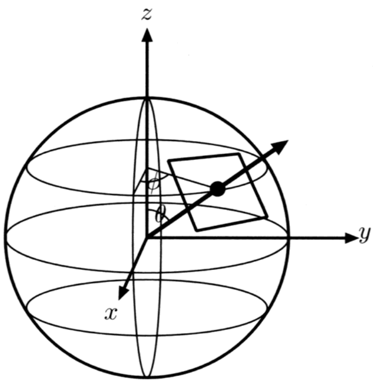


図 2.3 デカルト座標系の上に射影された球面上の座標のメッシュ

$$ds^2 = a^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2) \tag{2.67}$$

本文でも述べたように、球面の座標系側に r なる第三の変数を導入すれば、もう少し、わかりのよい議論ができるが、その場合は三次元極座標系の議論と同じになるので、ここでは省略する。一般には、このように便利な変数がいつも簡単に得られるとは限らないのが面倒な点である。

球面は厳密には平面に伸展することはできない。しかし、図 2.3 に示すように、球面上のある点で球面に接するような平面を考え、その平面に垂直な方向から球面上の図形の射影を作ると、極めて小さな領域の射影では、球面と接平面の差はほとんどなくなる。この接平面に、球面上の座標のメッシュの射影を作ると、ほぼ長方形のメッシュが投影される。このことは、縮尺率の高い地図の周辺が緯度経度で囲まれていても、ほとんど長方形であることから理解できよう。

2.3 反変ベクトル

任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ の成分の変換則を求めよう。ただし、曲線座標系では二点間を結ぶ位置ベクトルのような長いベクトルは対象としない。微小ベクトルや微分により得られるようなベクトル、位置だけで値が決まる場のベクトルなどが対象である。

元の座標系におけるベクトルの展開式に現われる自然基底を $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ で展開してみよう。

$$\boldsymbol{A} = A^m \boldsymbol{e}_m = A^m (\partial_m^{\mu'} \boldsymbol{e}_{\mu'}) = (\partial_m^{\mu'} A^m) \boldsymbol{e}_{\mu'} \tag{2.68}$$

この係数 $\partial_m^{\mu'} A^m$ は $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ で展開したときの成分 $A^{\mu'}$ であるから、次式が得られる。

$$A^{\mu'} = \partial_m^{\mu'} A^m \tag{2.69}$$

順変換に、座標ベクトルと同じ反変順変換係数 $\partial_m^{\mu'}$ を使っている。

前述のように、自然基底と同じ変換式にしたがうことを**共変** (co-variant) といって下付きサフィックスを付け、逆変換式にしたがうことを**反変** (contravariant) といって上付きサフィックスを付ける。このため、A^m は、ベクトル $\boldsymbol{A}$ の **反変成分** (contravariant component) と呼ばれ、上付きサフィックスを用いる。なお、ベクトルの反変成分は、他書では**反変ベクトル** (contravariant vector) と記載されているが、本書ではその意味を考え、あえて反変成分と表現した。

今度は変換先の座標系の展開式に現われる $\boldsymbol{e}_{\mu'}$ の方を変換してみよう。

$$\boldsymbol{A} = A^{\mu'} \boldsymbol{e}_{\mu'} = A^{\mu'} (\partial_{\mu'}^m \boldsymbol{e}_m) = (\partial_{\mu'}^m A^{\mu'}) \boldsymbol{e}_m \tag{2.70}$$

この係数 $\partial^m_{\mu'} A^{\mu'}$ は $\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{e}_m$ で展開したときの成分 A^m であるから、次式が得られる。

$$A^m = \partial^m_{\mu'} A^{\mu'} \tag{2.71}$$

このように反変成分は、逆変換には反変逆変換係数を使う。

変換先の座標系における内積を、変換先の成分で表してみよう。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} &= g_{mn}\, A^m\, B^n = (\partial^{\mu'}_m\, \partial^{\nu'}_n\, g_{\mu'\nu'})\, (\partial^m_{\kappa'} A^{\kappa'})\, (\partial^n_{\lambda'} B^{\lambda'}) \\ &= (\partial^{\mu'}_m\, \partial^{\nu'}_n\, \partial^m_{\kappa'}\, \partial^n_{\lambda'})\, g_{\mu'\nu'}\, A^{\kappa'}\, B^{\lambda'} = (\delta^{\mu'}_{\kappa'}\, \delta^{\mu'}_{\lambda'})\, g_{\mu'\nu'}\, A^{\kappa'}\, B^{\lambda'} \\ &= g_{\mu'\nu'}\, A^{\mu'}\, B^{\nu'} \end{aligned} \tag{2.72}$$

ここで、式 2.26 を利用した。この結果、内積は変換先でも変換係数を含まない同じ形式で表現され、座標変換に対する不変量つまり**スカラー** (scalar) となっている。

ある量の成分が T^{mn} などのように二つのサフィックスで表現でき、かつその成分が $\partial^{\mu'}_m\, \partial^{\nu'}_n$ など、二つの変換係数の積で変換できるとき、この量を 2 階の**テンソル** (tensor) の成分と呼ぶ。二つの自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ および $\boldsymbol{e}_n$ に絡んだ量が T^{mn} であるとき、$\boldsymbol{T} = T^{mn}\, \boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n$ のように書かれる。$\otimes$ は直積といわれる表示法であり、二つの基底の組に絡んでいることと、全体の変換係数が、それぞれの変換係数の積になることを示しているが、成分の変換式で表現する方がわかりやすいかも知れない。

$$T^{\mu'\nu'} = \partial^{\mu'}_m\, \partial^{\nu'}_n T^{mn} \tag{2.73}$$

なお、この式は直積の定義より容易に導くことができる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{T} &= T^{mn}\, \boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n = T^{mn}\, (\partial^{\mu'}_m\, \boldsymbol{e}_{\mu'}) \otimes (\partial^{\nu'}_n\, \boldsymbol{e}_{\nu'}) \\ &= (\partial^{\mu'}_m\, \partial^{\nu'}_n\, T^{mn})\, \boldsymbol{e}_{\mu'} \otimes \boldsymbol{e}_{\nu'} = T^{\mu'\nu'}\, \boldsymbol{e}_{\mu'} \otimes \boldsymbol{e}_{\nu'} \end{aligned}$$

第 4 章の特殊相対性理論で紹介する応力テンソル T^{mn} は、2 階のテンソルの反変成分の代表例である。また、計量テンソル $\boldsymbol{g}$ は二つの基底から定義され、その成分が $g_{\mu'\nu'} = \partial^m_{\mu'}\,\partial^n_{\nu'}\,g_{mn}$ と、順変換にもかかわらず二つの反変逆変換係数の組合せで変換できることから、これは 2 階のテンソルの共変成分と呼ばれる。

サフィックスが三つで、かつ基底の変換係数の組合せで変換できる量、例えば $\boldsymbol{T} = T^{mnk}\,\boldsymbol{e}_m \otimes \boldsymbol{e}_n \otimes \boldsymbol{e}_k$ は 3 階のテンソルである。この類推から、ベクトルは 1 階のテンソルであり、内積などのスカラー（不変量）は 0 階のテンソルである。そうした用語を使う著者も多い。

[例 2.10] [二次元極座標系]　任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ の順変換式は前節の例 2.7 に示した $d\boldsymbol{x}$ の順変換式 2.51 と同じ形になる。

$$\begin{pmatrix} A^{r'} \\ A^{\phi'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi' & \sin\phi' \\ -\sin\phi'/r' & \cos\phi'/r' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^x \\ A^y \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

同様に逆変換式は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} A^x \\ A^y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi' & -r'\sin\phi' \\ \sin\phi' & r'\cos\phi' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{r'} \\ A^{\phi'} \end{pmatrix} \tag{2.75}$$

[例 2.11] [球面幾何学]　任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ の変換式は前節の例 2.9 に示した $d\boldsymbol{x}$ の変換式 2.64 と同じ形になる。

$$\begin{pmatrix} A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\cos\theta'\cos\phi' & -a\sin\theta'\sin\phi' \\ a\cos\theta'\sin\phi' & a\sin\theta'\cos\phi' \\ -a\sin\theta' & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{\theta'} \\ A^{\phi'} \end{pmatrix} \tag{2.76}$$

逆変換はできない。

第 3 章

双対座標系

リーマン幾何学では、基底の長さが 1 とは限らないため、計量テンソルが導入され、内積などの定義に、それが利用される。こうした計算を、さらに楽にするために導入された双対座標系という概念について説明する。

3.1　双対基底

リーマン幾何学では、基底の長さが 1 とは限らない。このため、ベクトルの内積や長さの計算に計量テンソルが必要であった。この面倒さを省くために導入されたのが双対基底という概念である。雰囲気を言えば、自然基底の逆数の長さを持つような基底である。

双対基底 (dual basis) ($\{\boldsymbol{e}^m\}$) は厳密には次のように定義される. なお ($\{\boldsymbol{e}_n\}$) は自然基底である。

$$\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}_n = \boldsymbol{e}_n \cdot \boldsymbol{e}^m = \delta^m_n \tag{3.1}$$

$\boldsymbol{e}^m$ はすべての自然基底 $\boldsymbol{e}_n$ $(n \neq m)$ に直交した方向をとり、さらに

$\boldsymbol{e}_m$ の射影の逆数の長さを持つ。この結果、$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n$ が必ずしも δ_{mn} となることが保証されていなかった自然基底に対し、双対基底 $\boldsymbol{e}^m$ を利用することにより、通常のベクトル空間と同様な式を確立することができたのである。

上式の最左辺と最右辺に、$\partial^{\mu'}_m \partial^n_{\nu'}$ を掛ける。

$$(\partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}^m) \cdot (\partial^n_{\nu'} \boldsymbol{e}_n) = \partial^{\mu'}_m \partial^n_{\nu'} \delta^m_n = \partial^{\mu'}_m \partial^m_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$$

自然基底の変換則はすでにわかっているので、左辺の $\partial^n_{\nu'} \boldsymbol{e}_n$ は $\boldsymbol{e}_{\nu'}$ にしてよい。

$$\partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$$

さて、変換先の座標系でも、$\boldsymbol{e}^{\mu'} \cdot \boldsymbol{e}_{\nu'} = \delta^{\mu'}_{\nu'}$ が成立するはずであり、この式を満す $\boldsymbol{e}^{\mu'}$ は一意に決定されるはずである。これと比較すると、

$$\boldsymbol{e}^{\mu'} = \partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}^m \tag{3.2}$$

なる双対基底の順方向の生成式が得られる。自然基底では反変逆変換係数（共変順変換係数）であったのに対し、反変順変換係数が生成係数となる。また、生成規則が反変的であるので、上付きのサフィックスを付ける。

この式から直ちに、双対基底の逆生成式も得られる。誘導は読者に一任する。

$$\boldsymbol{e}^m = \partial^m_{\mu'} \boldsymbol{e}^{\mu'} \tag{3.3}$$

この変換は、反変逆変換係数による。

3.2　双対座標系の計量テンソル

双対基底 $\boldsymbol{e}^m$ からも新たな計量テンソル g^{mn} を定義することができる。

$$g^{mn} = \boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^n \tag{3.4}$$

この g^{mn} の変換則は、双対基底の変換則を利用して求めることができる。

$$\begin{aligned} g^{\mu'\nu'} &= \boldsymbol{e}^{\mu'} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu'} = (\partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}^m) \cdot (\partial^{\nu'}_n \boldsymbol{e}^n) = \partial^{\mu'}_m \partial^{\nu'}_n (\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^n) \\ &= \partial^{\mu'}_m \partial^{\nu'}_n g^{mn} \end{aligned} \tag{3.5}$$

この変換則からわかるように、g^{mn} はテンソルの反変成分である。

計量テンソル g^n_m も定義できる。

$$g^n_m = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}^n = \boldsymbol{e}^n \cdot \boldsymbol{e}_m = \delta^n_m \tag{3.6}$$

g^n_m の変換則も基底の変換則から求めることができる。

$$\begin{aligned} g^{\nu'}_{\mu'} &= \boldsymbol{e}_{\mu'} \cdot \boldsymbol{e}^{\nu'} = (\partial^m_{\mu'} \boldsymbol{e}_m) \cdot (\partial^{\nu'}_n \boldsymbol{e}^n) = \partial^m_{\mu'} \partial^{\nu'}_n (\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}^n) \\ &= \partial^m_{\mu'} \partial^{\nu'}_n g^n_m \quad (= \delta^{\nu'}_{\mu'}) \end{aligned} \tag{3.7}$$

ここには、反変逆変換係数と反変順変換係数が混ざって入っているため、g^n_m はテンソルの混合成分である。

これで、計量テンソル $\boldsymbol{g}$ の共変成分 g_{mn}、混合成分 g^n_m、反変成分 g^{mn} が揃ったことになる。

3.3 共変ベクトル

この双対基底を使って、任意のベクトル $\boldsymbol{A}$ を展開してみよう。

$$\boldsymbol{A} = A_m\,\boldsymbol{e}^m \tag{3.8}$$

前節と同様な手順で、次の変換則が得られる。

$$A_{\mu'} = A_m\,\partial^m_{\mu'} \tag{3.9}$$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ の $\boldsymbol{e}^m$ の成分 A_m は、自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ と同じ変換を受けるため、ベクトルの**共変成分** (covariant component) と呼ばれ、下付きのサフィックスを付ける。なお、ベクトルの共変成分は、他書では**共変ベクトル** (covariant vector) と記載されているが、本書ではその意味を考え、あえて共変成分と表現した。

式 3.9 の $\partial^m_{\mu'}$ を m 行 μ' 列の行列に対応させるとすると、$A_{\mu'}$ などは横ベクトルに対応させるべきである。

$$\begin{aligned}(\{A_{\mu'}\})^T &= (\{A_m\})^T\,(\{\partial^m_{\mu'}\}) \\ &= (A_{1'},\cdots,A_{N'}) = (A_1,\cdots,A_N)\begin{pmatrix}\partial^1_{1'} & \cdots & \partial^1_{N'} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial^N_{1'} & \cdots & \partial^N_{N'}\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.10}$$

どんなベクトルからも、反変成分も共変成分も求めることができる。例えば、微小ベクトル $d\boldsymbol{x}$ も自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ で展開せずに、双対基底 $\boldsymbol{e}^m$ で展開すれば、共変成分 dx_m が得られる。

$$d\boldsymbol{x} = dx_m\,\boldsymbol{e}^m \tag{3.11}$$

元々、共変成分を使ってベクトルを定義した方がよいものとして、

任意のスカラー関数 f の空間微分商がある[*1]。これは、自然基底が分母に入るからである。$\partial_m f = \partial f/\partial x^m$ を変換してみよう。

$$\partial_{\mu'} f = \frac{\partial f}{\partial x^{\mu'}} = \frac{\partial f}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial x^{\mu'}} = (\partial_m f)\,\partial^m_{\mu'} \tag{3.12}$$

これが、$\partial_m f$ の順変換である。この式を式 3.9 と比較してみると、同じ形をしており、変換係数が、反変逆変換係数になっていることに着目してほしい。このため、$\partial_m f$ は共変成分としての変換を受ける。逆変換は次のようになる。

$$\partial_m f = (\partial_{\mu'} f)\,\partial^{\mu'}_m \tag{3.13}$$

詳細は次節で説明するが、$\partial_m f$ から反変成分を求めることも可能である。その場合には $\partial^m f$ と書き、反変成分となる。

[例 3.1] [デカルト座標系の双対基底]　デカルト座標系では次式が成立する。

$$\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = \delta_{mn} \tag{3.14}$$

これと式 3.1 を比較すると、δ_{mn} と δ^m_n は同じ内容であるので、

$$\boldsymbol{e}^m = \boldsymbol{e}_m \tag{3.15}$$

であることがわかる。つまり、デカルト座標系では双対基底は自然基底と同じである。その結果 $dx_m = dx^m$ も成立する。これはデカルト座標系でのみ成立する。

さらに計量テンソルは次のようになる。

$$(\{g_{mn}\}) = (\{g^n_m\}) = (\{g^{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, 1, \dots) \tag{3.16}$$

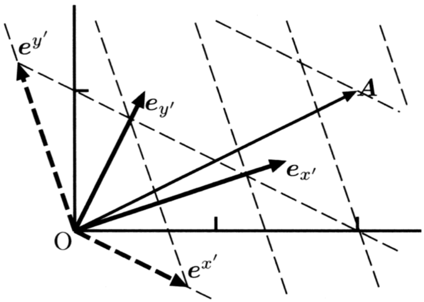


図 3.1　斜交座標系における双対基底（ベクトルの共変成分と反変成分に着目）

[例 3.2] [斜交座標系の双対基底]　例 2.6 に示した斜交座標系の双対基底を考えてみよう。双対基底は式 3.1 に示した自然基底との正規直交関係から誘導するのが筋であろうが、デカルト座標系との変換がわかっている場合には、デカルト座標系の双対基底から誘導する方法がある。幸いにして、デカルト座標系における双対基底は自然基底と一致しているので、これは楽な方法である。

この関係式は、式 2.45 に誘導した反変順変換係数が使われ、次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^{x'} &= \partial_x^{x'}\boldsymbol{e}^x + \partial_y^{x'}\boldsymbol{e}^y = 0.8\boldsymbol{e}^x - 0.4\boldsymbol{e}^y \\ \boldsymbol{e}^{y'} &= \partial_x^{y'}\boldsymbol{e}^x + \partial_y^{y'}\boldsymbol{e}^y = -0.4\boldsymbol{e}^x + 1.2\boldsymbol{e}^y \end{aligned} \tag{3.17}$$

これら双対基底を図 3.1 に示すが、$(\{\boldsymbol{e}^{\mu'}\})$ と $(\{\boldsymbol{e}_{\mu'}\})$ の内積が正規直交していることが読み取れよう。

---

*1 単に微分と呼ぶと、df も df/dx のいずれを指すかがわからないので、df のような微小量を微分、df/dx のような微分演算の結果を微分商と呼ぶこととする。

また、基準としているデカルト座標系で $(2, 1)$ の値を持つ $\boldsymbol{A}$ なるベクトルが（デカルト座標系では共変成分は反変成分と等しい）、双対座標系で次のような大きな成分を持つことも読み取れよう。

$$\begin{aligned}\left(\{A_{\mu'}\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'} A_m\}\right) = \left(\{A_m\}\right)\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) \\ &= \begin{pmatrix}2 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1.5 & 0.5 \\ 0.5 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3.5 & 2\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.18}$$

これから $\boldsymbol{A}$ の二乗長を計算することができる。

$$A^{\mu'} A_{\mu'} = 1.2 \times 3.5 + 0.4 \times 2 = 5 \quad (= 2^2 + 1^2) \tag{3.19}$$

$g^{\mu'\nu'}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}\left(\{g^{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{\mu'}_m g^{mn} \partial^{\nu'}_n\}\right) = \begin{pmatrix}\partial^{x'}_x & \partial^{x'}_y \\ \partial^{y'}_x & \partial^{y'}_y\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\partial^{x'}_x & \partial^{x'}_y \\ \partial^{y'}_x & \partial^{y'}_y\end{pmatrix}^T \\ &= \begin{pmatrix}0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8 & -0.4 \\ -0.4 & 1.2\end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix}0.8 & -0.8 \\ -0.8 & 1.6\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{3.20}$$

さらに、$g_{\mu'\nu'}$ の昇階と言ってもよいし、$g^{\mu'\nu'}$ の降階と言ってもよいが、$g_{\mu'\kappa'}\, g^{\kappa'\nu'}$ を計算すると、期待通り $\delta^{\nu'}_{\mu'}$ が得られる。

$$g_{\mu'\kappa'}\, g^{\kappa'\nu'} = \begin{pmatrix}2.5 & 1.25 \\ 1.25 & 1.25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.8 & -0.8 \\ -0.8 & 1.6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix} \tag{3.21}$$

[例 3.3] [勾配ベクトル]　空間微分商の直感的理解を得るために、図 3.2 を見てほしい。先と同じ直線座標系で、今度は f の等高線が記載してある。まず、基準となるデカルト座標系では $\boldsymbol{e}_x$ 方向に 1 動くと f は 2 増えるから、$\partial f/\partial x^x = 2$、また $\boldsymbol{e}_y$ 方向に 1 動くと f は 1 増えるから、$\partial f/\partial x^y$ は 1 である。このためデカルト座標系におけるベクトルは図に $\boldsymbol{A}$ として示した $(A_x, A_y) = (2, 1)$ である。

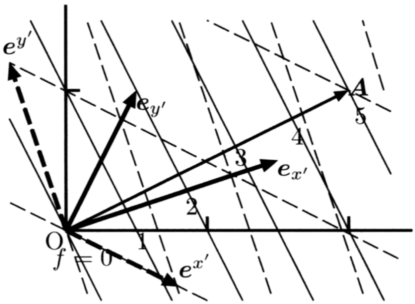


図 3.2　共変的なスカラー関数の微分商（f の値を細実線で、共変座標系のメッシュを細破線で示す）

変換後の直線座標系では、自然基底の $\boldsymbol{e}_{x'}$ 方向へ 1 移動すると f は 3.5 増え、$\boldsymbol{e}_{y'}$ 方向へ 1 移動すると f は 2 増えるので、$\partial f/\partial x^{x'}$ は 3.5、$\partial f/\partial x^{y'}$ は 2 である。しかし自然基底で見ると $(3.5, 2)$ なるベクトルは元のベクトルとは一致しない。これを双対基底系の $(3.5, 2)$ ベクトルだと思うと一致するのである（実は、この $\boldsymbol{A}$ や基底は、前の例の値に合せてあるので、簡単に比較可能である）。

反変の微分商 $\partial^m f$ $(= g^{mn}\,\partial_n f)$ は双対基底の方へ移動することで、その成分を計算することができ、上記と同様の考察が可能である。作業は読者に任せる。

[例 3.4] [二次元極座標系]　自然基底については、例 2.7 に示した変換式 2.53 が成立する。

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y$$
$$\boldsymbol{e}_\phi = -r\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + r\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y$$

双対基底はこれらと正規直交性が成立しないといけない。簡単に言え

ば、同じ方向を向き、長さが逆数のベクトルを定義すればよい。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}^r &= \cos\phi\,\boldsymbol{e}^x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}^y \\ \boldsymbol{e}^\phi &= -(\sin\phi/r)\,\boldsymbol{e}^x + (\cos\phi/r)\,\boldsymbol{e}^y \end{aligned} \tag{3.22}$$

またベクトルの共変成分の変換式は自然基底の変換式と同じになる。

$$\begin{pmatrix} A_r & A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & -r\sin\phi \\ \sin\phi & r\cos\phi \end{pmatrix} \tag{3.23}$$

$g^{\mu'\nu'}$ を求めてみよう (μ', ν' は極座標系側)。

$$(\{g^{\mu'\nu'}\}) = (\{\partial^{\mu'}_m\})\,(\{g^{mn}\})\,(\{\partial^{\nu'}_n\})$$

$$\begin{aligned} &= \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi/r & \cos\phi/r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi/r & \cos\phi/r \end{pmatrix}^T \\ &= \mathrm{diag}(1, 1/r^2) \end{aligned} \tag{3.24}$$

これは、$\boldsymbol{e}^r$ の長さが 1 なのに対し、$\boldsymbol{e}^\phi$ の長さは $1/r$ であること、それ故、ベクトルの長さに対し、A_ϕ は $1/r$ 倍の寄与があることを示している。

前節の例とこの例に対し、r が極めて大きい場合の略図を描くことにより、自然基底と双対基底の直交関係や任意ベクトルの成分の概要を理解することができるので、ぜひトライしてほしい。

[例 3.5] [球面幾何学]　自然基底については、例 2.9 に示した変換式 2.65 が成立する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_\theta &= a\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + a\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_y - a\sin\theta\,\boldsymbol{e}_z \\ \boldsymbol{e}_\phi &= -a\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}_y \end{aligned}$$

これらの逆変換は存在しない。したがって双対基底については、順変換はなく、これらの係数で逆変換を受けることとなる。

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{e}^x &= a\cos\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}^\theta - a\sin\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}^\phi \\
\boldsymbol{e}^y &= a\cos\theta\sin\phi\,\boldsymbol{e}^\theta + a\sin\theta\cos\phi\,\boldsymbol{e}^\phi \\
\boldsymbol{e}^z &= -a\sin\theta\,\boldsymbol{e}^\theta
\end{aligned}
\tag{3.25}
$$

ベクトルの共変成分については、自然基底の順変換と同じ変換式となる。ただし、この逆変換はない。

$$
\begin{pmatrix} A_\theta & A_\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_x & A_y & A_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a\cos\theta\cos\phi & -a\sin\theta\sin\phi \\ a\cos\theta\sin\phi & a\sin\theta\cos\phi \\ -a\sin\theta & 0 \end{pmatrix}
\tag{3.26}
$$

$g^{\mu'\nu'}$ は $\partial^{\mu'}_M$ などが決まらないため、$\partial^{\mu'}_M\, g^{MN}\, \partial^{\nu'}_N$ からは計算できない。しかし、$(\{g_{\mu'\nu'}\})$ の逆行列としては計算可能である。

$$
(\{g^{\mu'\nu'}\}) = (\{g_{\mu'\nu'}\})^{-1} = \frac{1}{a^2}\,\mathrm{diag}(1, 1/\sin^2\theta)
\tag{3.27}
$$

3.4　降階、昇階と内積

計量テンソルの共変成分 g_{mn} や反変成分 g^{mn} には、便利な機能がある。それはベクトルやテンソルの共変や反変を自由に変更できるのである。まず計量テンソルの共変成分 g_{mn} を使うと、ベクトルの反変成分から共変成分を得ることができる。

$$
\begin{aligned}
g_{mn}\, A^n &= (\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n)\, A^n = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_m \cdot (A_n\, \boldsymbol{e}^n) = \delta^n_m\, A_n \\
&= A_m
\end{aligned}
\tag{3.28}
$$

上付きサフィックスを下付きにしたということで、**降階** (lowering) ともいう。さらに、計量テンソルの反変成分 g^{mn} を使うと、ベクトルの共変成分から反変成分を得ることができる。

$$\begin{aligned} g^{mn}\,A_n &= (\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^n)\,A_n = \boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}^m \cdot (A^n\,\boldsymbol{e}_n) = \delta^m_n\,A^n \\ &= A^m \end{aligned} \tag{3.29}$$

下付きサフィックスを上付きにしたということで、**昇階** (raising) ともいう。これらの作業はテンソルについても適用可能である。以後の議論で分かるように、いろいろな計算が、いちいち変換係数を用いないでも計量テンソルからだけできるようになるため、きわめて便利である。

微分商 $\partial_m f$ も共変成分であるので、昇階可能であり、$\partial^m f = g^{mn}\,\partial_n f$ で定義される。これを簡略化して、しばしば $\partial^m = g^{mn}\,\partial_n$ と記載されるが、ベクトルの偏微分などでは、こううまくはいかないので注意して欲しい。

例えば、計量テンソル自身も 2 階のテンソルであるので、g^{mn} や g_{mn} を用いて、昇階や降階ができる。g_{mn} を g^{mn} を用いて一階昇階すると g^n_m、もう一階昇階すると g^{mn} が得られる。逆も成立する。最初の昇階の式を見てみると、$g^n_m = \delta^n_m$ なので、$(\{g^{mn}\})$ と $(\{g_{mn}\})$ が互いに逆行列であることが言える。さらに、$(\{g^{\mu'\nu'}\})$ と $(\{g_{\mu'\nu'}\})$ も互いに逆行列である。これらは簡単に証明できるので、各人でトライしてほしい。

成分の変換のされ方でサフィックスの上下を付けるので、T_{mn}、T^n_m、T^{mn} はそれぞれ、テンソルの共変成分、混合成分、反変成分と呼ばれる。次の節で示すように、これらのいずれか一つがわかっていると、他の成分は計算可能である。

任意の二つのベクトルに対し、$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{e}_m$ で、$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{e}_n$ で展開するこ

とにより、内積を次式の形で求めることができる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (A^m\,\boldsymbol{e}_m)\cdot(B^n\,\boldsymbol{e}_n) = g_{mn}\,A^m\,B^n \tag{3.30}$$

となる。同様な手法により、次の式を証明できる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = g^{mn}\,A_m\,B_n \tag{3.31}$$

$\boldsymbol{A}$ を $\boldsymbol{e}_m$ で、$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{e}^n$ で展開することにより、同じ内積を次式の形で求めることもできる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (A^m\,\boldsymbol{e}_m)\cdot(B_n\,\boldsymbol{e}^n) = \delta^n_m\,A^m\,B_n = A^m B_m \tag{3.32}$$

となる。同様に

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = (A_m\,\boldsymbol{e}^m)\cdot(B^n\,\boldsymbol{e}_n) = \delta^m_n\,A_m\,B^n = A_m\,B^m \tag{3.33}$$

最後の二式には計量テンソルは見掛け現われてこない*2。

$\boldsymbol{B}$ を $\boldsymbol{A}$ とすることで、ベクトルの二乗長の計算式が得られる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = g_{mn}\,A^m\,A^n = g^{mn}\,A_m\,A_n = A^m\,A_m \tag{3.34}$$

以上の内積に関る複数の式は、m, n を μ, ν に置き換えてもすべて成立する。つまり、内積は座標変換に対し**不変量** (invariant) となる。

最後に、$g_{\mu'\nu'}$ の行列式 $|\{g_{\mu'\nu'}\}|$ について議論しておこう。

$$|\{g_{\mu'\nu'}\}| = |\{\partial^m_{\mu'}\,\partial^n_{\nu'}\,g_{mn}\}| = |\{\partial^m_{\mu'}\}|\;|\{\partial^n_{\nu'}\}|\;|\{g_{mn}\}|$$

行列式はたった一つの値しか持たないので、厳密にはサフィックスを付けるのはおかしい。そこで、以後はなるべく $g_{\prime\prime}$ のように表現しよう。つまり、

$$g_{\prime\prime} = J_\prime^2 g \tag{3.35}$$

*2 実は内積をこの式のように簡単な形にするために、共変、反変という概念が導入されたのである。

ただし、$J_{\prime}$ はヤコビ行列 $\{\partial^m_{\mu'}\}$ の行列式であり、**ヤコビアン** (Jacobian) と呼ばれる。これから

$$\sqrt{g_{\prime\prime}} = J_{\prime}\sqrt{g} \tag{3.36}$$

後に述べるように、相対論で扱う空間では $g_{\prime\prime}$ や g などは負となる。こうした場合には上式の代わりに次式を用いることとする。

$$\sqrt{-g_{\prime\prime}} = J_{\prime}\sqrt{-g} \tag{3.37}$$

これから、次式で定義される体積要素が不変量であることが示される (必要に応じ負号を入れる)。

$$\begin{aligned} dV' &= \sqrt{g_{\prime\prime}}dx^{1'}\cdots dx^{N'} = \sqrt{g}J_{\prime}\,dx^{1'}\cdots dx^{N'} = \sqrt{g}dx^1\cdots dx^N \\ &= dV \end{aligned} \tag{3.38}$$

ここで、次式に示す関係を利用した。まず 2 次元空間では、$dx^1dx^2 = J_{\prime}\,dx^{1'}dx^{2'}$ が成立する。それは $dx^{1'}\times dx^{2'}$ の作る四角形の面積が、$(\{x^m\})$ 空間に変換されると、平行四辺形となると同時にその面積が $J_{\prime}$ 倍になるからである。これを拡張すると、一般に、多重微分要素間には次式が成立する。

$$dx^1dx^2\cdots dx^N = J_{\prime}dx^{1'}dx^{2'}\cdots dx^{N'} \tag{3.39}$$

第 4 章

特殊相対性理論

ここまでの章で、座標変換の基礎に関する説明が終了した。ちょうどうまい具合に、特殊相対性理論は直線座標系の変換の理論とも言える。そこで、座標変換の復習を兼ねて、特殊相対性理論の紹介を行う。しかし、通常のデカルト座標系のような直線座標系とは異なり、計量テンソルが特殊、つまり線素が特殊な形で与えられるミンコフスキー空間と呼ばれる空間の変換理論である。リーマン幾何学がもっとも有名になったのは、アインシュタインが一般相対性理論を誘導する道具としたところにあるといっても過言ではなかろうが、その芽は、まずミンコフスキー空間にあったと想像できる。

4.1　特殊相対性理論における座標変換

アインシュタイン (Einstein) の導出した**特殊相対性理論** (special relativity principle) は、二つの互いに一定速度で移動している慣性系の間の座標変換の仕方を与えたものであり、次の原理から導出された。なお、**慣性系** (inertial system) とはニュートンの第一法則（慣性

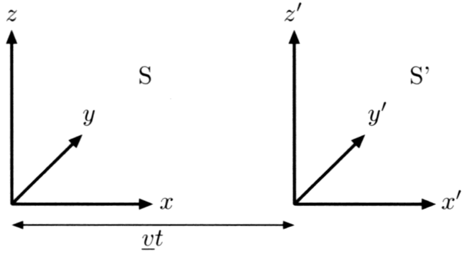


図 4.1　S 系に対し、x 軸方向に $\underline{v}$ の速度で移動している S$'$ 系

の法則）が成立する系であり、そこでは外力を受けない質点は等速直線運動を行う。また、本章では以下、特殊相対性理論のことを単に相対論という。

光速不変性　光速で直線移動するものは、いずれの座標系で観察しても光速で移動する。

線形性　相互の座標変換は空間座標と時間座標の一次変換で与えられる。

相対性　二つの座標系はまったく対等であり、どちらかをより基準的であるとすることはできない。

光速不変性は、宇宙をかなりの速度で走っている地球上で、走行方向および走行直角方向のいずれの方向で光の速度を測っても、同じ値が得られた、という**マイケルソン・モーリーの実験** (Michelson and Morley experiment) の結果を説明するために導入された。

図 4.1 に示すように、ある慣性系 S に対し x 軸方向に等速度 $\underline{v}$ で走っている別の慣性系 $'$ を考える。v に付けたアンダーラインは、v が普通の意味での速度 $v = x/t$（古典的速度）であることを示す。後

に相対論的速度が出てくるための区別であり、当面、気にしなくてよい。S′ 系座標軸はすべて S 系の座標と平行になっているものとし、また $t = 0$ および $t' = 0$ で、両原点は一致しているとする。S′ 系で原点から x' 軸方向および y' 軸方向に L だけ離れた点にそれぞれ鏡を置き、原点から光を発射し、往復時間を測る。すると実験結果から、その値は等しくなる。これを S 系から観測してみよう。まず、光速不変性から、S 系での光速は S′ 系での光速 c と等しい[*1]。x' 軸方向に走る光が t 秒で鏡に到達したとする。この間、鏡は $\underline{v}t$ だけ遠ざかる。したがって、$ct = L + \underline{v}t$。これから、行きに要する時間は $L/(c - \underline{v})$。同様に、鏡から原点への戻りに要する時間は、原点が近寄ってくるだけ短縮し $L/(c + \underline{v})$、合計すると $2Lc/(c^2 - \underline{v}^2)$ の時間がかかる。

y' 軸方向に走る光の伝搬時間も L/c ではない。というのはやはり鏡が移動し、S 系で見ると光は斜めに移動する必要があるからである。ピタゴラスの定理より、$(ct)^2 = L^2 + (\underline{v}t)^2$ が成立するから、これから伝搬時間は $L/\sqrt{c^2 - \underline{v}^2}$ となる。戻りも原点が移動し斜めに移動する必要があるが、合同な三角形となるから、同じ伝搬時間が得られる。そこでこれらを合計すると $2L/\sqrt{c^2 - \underline{v}^2}$ が得られる。しかし、困ったことにこの時間は先に求めた x' 方向の伝搬時間と一致しない。つまり S′ 系で同時に原点に到着した光が、S 系で観測すると、異なる時刻に到着するように見える。

この議論の基礎としているのが、次式に示す**ガリレイ変換** (Galilean transform) である[*2]。

$$
\begin{aligned}
t' &= t \\
x' &= x - \underline{v}t
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

[*1] 厳密には c にもアンダーラインを付すべきかも知れないが、物理定数であるのと、鬱陶しいので省略した。

[*2] Galilean とはガリレオ・ガリレイ Galileo Galilei の形容詞である

$$y' = y$$
$$z' = z$$

この矛盾を解決するためにローレンツ (Lorentz) が導入したのが、距離の短縮という概念である。これは、S′ 系での距離を S 系で観測すると、移動方向に短縮して見えるという概念である。最初にこの概念を提唱されたときには、とんでもない概念であると反論された。しかし、現在は正しい考えであると理解されている。S′ 系での L が S 系では x 方向にだけ $L\sqrt{1-(\underline{v}/c)^2}$ に短縮すると考えると、x' 方向の伝搬時間が補正され、両者ともちょうど $2L/\sqrt{c^2-\underline{v}^2}$ となる。距離の短縮を認めると、S′ 系での座標点 (x', y', z') は、S 系で観測すると $(x'+\underline{v}t, y', z')$ には見えず、$(x'\sqrt{1-(\underline{v}/c)^2}+\underline{v}t, y', z')$ に見えることになる。これを (x, y, z) と置くことにより、S′ 系と S 系の間の座標変換を求めることができる。ただ、何故距離の収縮があるのかのしっかりしたイメージがなかった。

アインシュタインは、これと同じ結果を先に示した仮説だけを使って示した。まず線形性から、S′ 系と S 系の間の座標変換は次式で与えられるはずである。

$$t' = At + Bx, \qquad x' = Cx + Dt, \qquad y' = y, \qquad z' = z \tag{4.2}$$

ここで、t' と t の間、x' と x の間の係数 A と C が 1 でないかも知れない、t' に x の影響が入っているかも知れないというのがアインシュタインの大胆な仮説である。S なお、y' や z' はそちら方向に移動していないことから自明であるが、仮に x' と同様な変換を仮定しても、同じ結果が得られる。まず、S′ 系の原点 $x' = 0$ を S 系で観測すると、$x = \underline{v}t$ に見えることから、C と D の関係が得られる。さらに逆に S 系の原点 $x = 0$ を S′ 系で観測すると、座標系の相対性から $x' = -\underline{v}t'$ に見えることから、A と D の関係が得られる。これらの

結果は $D = -\underline{v}C$、$D = -\underline{v}A$ である。A を基準にすれば、$C = A$、$D = -\underline{v}A$ が得られる。

B と A の関係は光速の不変性から誘導できる。S′ 系の原点から任意の方向に発射された光は、どちらの方向に発射されても光速で伝搬するから、次の関係が成立する。

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2 \tag{4.3}$$

これに変換関係を代入すると、x、y、z、t の二次式が得られる。

$$A^2(x - \underline{v}t)^2 + y^2 + z^2 = c^2(At + Bx)^2$$

整理すると、

$$(A^2 - c^2B^2)x^2 + y^2 + z^2 = A^2(c^2 - \underline{v}^2)t^2 + 2A(c^2B + A\underline{v})xt$$

この光の伝搬を S 系で観測してもやはり光速で伝搬するように見えるはずであるから、次式を満たすはずである。

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2 \tag{4.4}$$

これら x、y、z、t の二式は当然一致すべきである。

まず xt の係数が 0 のことから、$B = -A\underline{v}/c^2$ が得られる。これで、すべての係数が A で与えられるので、係数同士を比較すると、A が得られ、すべての係数が決定できる。なお、A の符号に正負の可能性が残るが、$\underline{v} = 0$ で (x', y', z', t') は (x, y, z, t) と等しくなるはずであるから、A は正である。β_v、γ_v を次式で定義された値として[*3]、$A = C = \gamma_v$、$B = -\gamma_v\beta_v/c$、$D = -\gamma_v\beta_v c$ が得られる。

$$\beta_v = \underline{v}/c \quad (\leq 1) \tag{4.5}$$

$$\gamma_v = 1/\sqrt{1 - \beta_v^2} \quad (\geq 1) \tag{4.6}$$

---

*3 厳密には β_v、γ_v の v にもアンダーラインが必要であるが、いずれも古典的速度に対してしか定義されないため省略する。

こうして得られた次の変換式は**ローレンツ変換** (Lorentz transform) と呼ばれる。

$$
\begin{aligned}
t' &= \gamma_v(t - \beta_v x/c) \quad \text{または} \quad ct' = \gamma_v(ct - \beta_v x) \\
x' &= \gamma_v(x - \beta_v ct) \\
y' &= y \\
z' &= z
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

ローレンツ変換の逆変換は、順変換から簡単に求められる。

$$
\begin{aligned}
t &= \gamma_v(t' + \beta_v x'/c) \quad \text{または} \quad ct = \gamma_v(ct' + \beta_v x') \\
x &= \gamma_v(x' + \beta_v ct') \\
y &= y' \\
z &= z'
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

ここでちょっと面白い関係を導いておこう。$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dx'^2 - c^2dt'^2$ なる量であるが、式 4.7 より $dx' = \gamma_v(dx - \beta_v cdt)$, $cdt' = \gamma_v(cdt - \beta_v dx)$ なので、次の式が得られる。

$$
\begin{aligned}
ds'^2 &= dx'^2 + dy'^2 + dx'^2 - c^2dt'^2 \\
&= \gamma_v^2(dx - \beta_v cdt)^2 + dy^2 + dz^2 - \gamma_v^2(cdt - \beta_v dx)^2 \\
&= \gamma_v^2(1 - \beta_v^2)dx^2 + dy^2 + dz^2 - \gamma_v^2(1 - \beta_v^2)c^2dt^2 \\
&= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2dt^2
\end{aligned}
$$

この式の右辺は $ds'^2 = dx'^2 + dy'^2 + dx'^2 - c^2dt'^2$ からダッシュを除去したものになっている。つまり、次の量 ds^2 が座標変換に対し不変量となっているのである（最初に $-c^2dt^2$ から書くのは、この分野の習慣である)。

$$
ds^2 = -c^2dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{4.9}
$$

つまり、この ds^2 こそがローレンツ変換における線素となっているのである。線素というと、デカルト座標系における二乗和の距離のイメージが払拭できないため、わざわざ別の**固有距離 (proper distance)** と名称でよぶことが多い。固有とはもちろん、相対論に固有という意味である。ここに定義された固有距離 ds^2 を線素とする時空間を**ミンコフスキー空間 (Minkowski space)** という。

ちなみに、デカルト座標系のような通常の二乗和に近い形で定義される距離は、下記に示すように不変量とはならない。

$$
\begin{aligned}
&c^2dt'^2 + dx'^2 + dy'^2 + dx'^2 \\
&= \gamma_v^2(cdt - \beta_v dx)^2 + \gamma_v^2(dx - \beta_v cdt)^2 + dy^2 + dz^2 \\
&= \frac{1+\beta_v^2}{1-\beta_v^2}c^2dt^2 - 2\frac{\beta_v}{1-\beta_v^2}dx\,cdt + \frac{1+\beta_v^2}{1-\beta_v^2}dx^2 + dy^2 + dz^2
\end{aligned}
$$

ds を線素として使った場合の g_{mn} の行列は次のようになる（習慣として時間成分を第 0 成分として最初に並べる)。

$$\big(\{g_{mn}\}\big) = \mathrm{diag}(-c^2, 1, 1, 1) \tag{4.10}$$

対角要素のうち 0 行 0 列成分が負であるが、どんな変換をしてもすべてを正にはできない。したがって、座標変換を回転するようなイメージでは理解することができないが、徐々に慣れてもらうしかないだろう。

なお、g^{mn} は g_{mn} の行列の逆行列から直ちに計算できる。

$$\big(\{g^{mn}\}\big) = \mathrm{diag}(-1/c^2, 1, 1, 1) \tag{4.11}$$

ただし、$g_m^n = \delta_m^n$ であり、対角行列の符号もすべて正、値もすべて 1 であるので注意して欲しい。

$$\big(\{g_m^n\}\big) = \mathrm{diag}(1, 1, 1, 1) \tag{4.12}$$

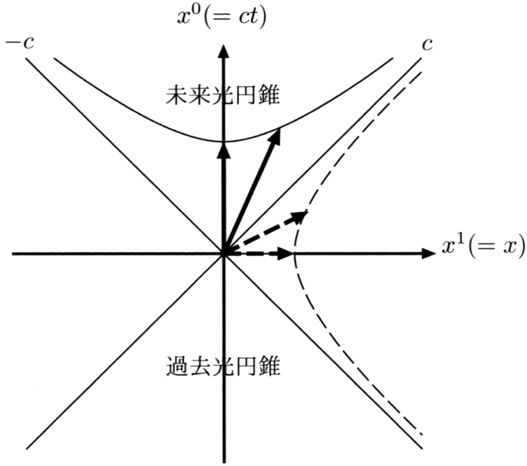


図 4.2　正規化されたミンコフスキー空間（原点を通る光線の軌跡は勾配 ±1 となる。固有距離 ds^2 はデカルト空間における距離とは異なる定義で与えられているため、これら実線矢印同士の ds^2 (< 0)、破線矢印同士の ds^2 (> 0) はそれぞれ等しい。）

ところで、相対論では、時間座標 t には必ず c が付随してくる。そこで、4 つの座標を (t, x, y, z) としないで、$(\{x^m\}) = (ct, x, y, z)$ とする、つまり $x^0 = ct$ とすると、計量テンソルから c が消え失せるのに加え、時間座標も空間の単位を持つことになり、便利である。これを以後、特に区別する場合には**正規化 (normalized)** されたミンコフスキー空間と呼ぼう。正規化すると、式 4.10 および 4.11 の行列表現は共に、次のように同じ形となる。

$$\left(\{g_{mn}\}\right) = \left(\{g^{mn}\}\right) = \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1) \tag{4.13}$$

軸方向によって基底の長さが異なることは、直交曲線座標系などでは当り前の現象であるが、基底 $\boldsymbol{e}_{ct}$ の二乗長が負となるのはやや意外であり、そのことが、相対論の直感的理解を妨げる大きな理由となっている。例えば、図 4.2 にミンコフスキー空間の (ct, x) 座標だけを示したが、ミンコフスキー空間で同じ ds^2 (< 0) を持つ二つの実線矢印は、デカルト座標系ではまったく異なる長さを持つように見える。また、二つの破線矢印同士の ds^2 (> 0) も等しいのである。また、斜め $\pm 45°$（正規化座標系で）に載ったベクトルの ds^2 は 0 となる。このように、ミンコフスキー空間については、デカルト座標系のように、ベクトルの回転により等距離のベクトルが円形に並ぶような直感的な表現法はないのである。

(ct, x, y, z) 座標系では、このベクトルの距離 0 の条件を満すのは、式 4.4 に示した ct 軸を中心軸とした円錐形となる。また、後に示すように、相対論では粒子の運動は光速を超えない。このため、原点から出発した粒子はこの円錐の外には行けない。この円錐を**光円錐** (light cone) という。また、$ct > 0$ 側の光円錐を**未来光円錐** (future light cone)、$ct < 0$ 側の光円錐を**過去光円錐** (past light cone) と呼ぶ。

[例 4.1] [ガリレイ変換の自然基底]　ガリレイ変換の式 4.1 から、あまり本質的でない y'、z' 成分を省略して (t', x') に関する反変順変換係数 $\partial^{\mu'}_m$ を求めよう。

$$\left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\underline{v} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.14}$$

また、上式の逆行列として、反変逆変換係数 $\partial^m_{\mu'}$ も次のように得られる。

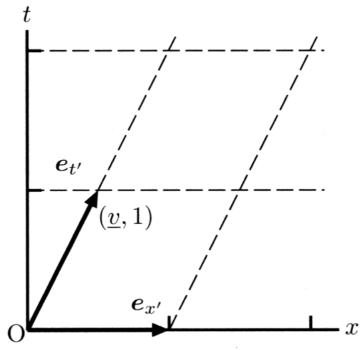


図 4.3　ガリレイ変換

$$\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \underline{v} & 1 \end{pmatrix} \tag{4.15}$$

これから、自然基底 $(\boldsymbol{e}_{t'}, \boldsymbol{e}_{x'})$ は次式のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{t'} &= \boldsymbol{e}_t + \underline{v}\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_{x'} &= \boldsymbol{e}_x \end{aligned} \tag{4.16}$$

これらを図 4.3 に示す。ベクトルの成分は t 成分を x 成分に優先させているのに対し、図では t 軸を横軸とせず縦軸としている。ミンコフスキー空間の図を描くときにも、この習慣があるので、以後も注意して欲しい。

[例 4.2] [ミンコフスキー空間の自然基底]　あまり本質的でない y、z 成分を省略して (t, x) に関する反変逆変換係数 $\partial^m_{\mu'}$ を m 行 μ' 列の行列で表すと、式 4.8 より次のようになる。ただし、この例では、基底のことを理解するために、$x^0 = ct$ ではなく、$x^0 = t$ の立場をとっている。合せて $c = 2$（本当は $3{\times}10^8$m/s）、$\beta_v = 0.6$、

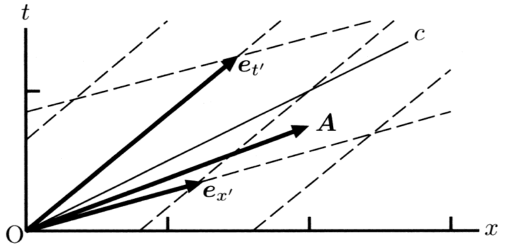


図 4.4　ミンコフスキー空間の自然基底とベクトル（反変成分を推定せよ）

$\gamma_v = 1/\sqrt{1-\beta_v^2} = 1.25$ を前提とした数値も示した。

$$\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v/c \\ \gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.375 \\ 1.5 & 1.25 \end{pmatrix} \tag{4.17}$$

これから変換先の座標系の基底は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{t'} &= \partial^t_{t'}\boldsymbol{e}_t + \partial^x_{t'}\boldsymbol{e}_x = \gamma_v\boldsymbol{e}_t + \gamma_v\beta_v c\boldsymbol{e}_x = 1.25\boldsymbol{e}_t + 1.5\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_{x'} &= \partial^t_{x'}\boldsymbol{e}_t + \partial^x_{x'}\boldsymbol{e}_x = \gamma_v(\beta_v/c)\boldsymbol{e}_t + \gamma_v\boldsymbol{e}_x = 0.375\boldsymbol{e}_t + 1.25\boldsymbol{e}_x \end{aligned} \tag{4.18}$$

これら基底を図 4.4 に示した。

また、順変換式より反変順変換係数が得られる（μ' 行 m 列）。

$$\left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v/c \\ -\gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.375 \\ -1.5 & 1.25 \end{pmatrix} \tag{4.19}$$

図中、元の座標系で $(A^t, A^x) = (0.75, 2)$ の値を持つ $\boldsymbol{A}$ なるベクトルが、直線座標系で次のような成分を持つことが読み取れよう。

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A^{t'} \\ A^{x'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial^{t'}_t & \partial^{t'}_x \\ \partial^{x'}_t & \partial^{x'}_x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t \\ A^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v(\beta_v/c) \\ -\gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^t \\ A^x \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.25 & -0.375 \\ -1.5 & 1.25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0.75 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1875 \\ 1.375 \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{4.20}$$

[例 4.3] [ミンコフスキー空間の双対基底]　ミンコフスキー空間における双対基底とベクトルの共変成分に対する具体的なイメージを掴もう。双対基底は $\partial^{\mu'}_m \boldsymbol{e}^m$ で計算できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{t'} &= \partial^{t'}_t \boldsymbol{e}^t + \partial^{t'}_x \boldsymbol{e}^x = \gamma_v \boldsymbol{e}^t - \gamma_v(\beta_v/c)\boldsymbol{e}^x = 1.25\boldsymbol{e}^t - 0.375\boldsymbol{e}^x \\ \boldsymbol{e}^{x'} &= \partial^{x'}_t \boldsymbol{e}^t + \partial^{x'}_x \boldsymbol{e}^x = -\gamma_v \beta_v c \boldsymbol{e}^t + \gamma_v \boldsymbol{e}^x = -1.5\boldsymbol{e}^t + 1.25\boldsymbol{e}^x\end{aligned} \tag{4.21}$$

これらを図 4.5 に示すが、$(\{\boldsymbol{e}^{\mu'}\})$ と $(\{\boldsymbol{e}_{\mu'}\})$ が正規直交していることが理解できよう。

また、基準座標系で $(0.75, 2)$ の値を持つ $\boldsymbol{A}$ なるベクトルが、双対座標系で次のような大きな成分を持つことも読み取れよう。

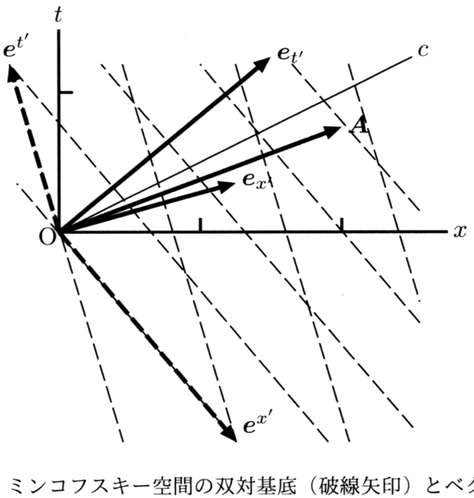


図 4.5　ミンコフスキー空間の双対基底（破線矢印）とベクトル（共変成分を推定せよ）

$$
\begin{aligned}
\left(\{A_{\mu'}\}\right) &= \left(\{A_m\}\right)\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) \\
= \begin{pmatrix} A_{t'} & A_{x'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0.75 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.25 & 0.375 \\ 1.5 & 1.25 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3.9375 & 2.78125 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

これから $\boldsymbol{A}$ の二乗長を計算することができる。

$$
\begin{aligned}
A^{\mu'}A_{\mu'} &= 0.1875 \times 3.9375 + 1.375 \times 2.78125 = 4.5625 \\
&\qquad (= 0.75^2 + 2^2 = A^m A_m)
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

$g_{\mu'\nu'}$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{g_{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right)^T \left(\{g_{mn}\}\right) \left(\{\partial^n_{\nu'}\}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v/c \\ \gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v/c \\ \gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v/c \\ \gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -\gamma_v c^2 & -\gamma_v\beta_v c \\ \gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

結果を見ると基準座標系の g_{mn} と同じ形になる。これは当然の結果である。元々、ローレンツ変換は、この計量テンソルが維持されるように選ばれたからである。ちなみに上式の g_{mn} の代わりに、対角行列 $\mathrm{diag}(c^2, 1)$ を変換してみると、$g_{\mu'\nu'}$ は非対角要素の存在するかなりひどい形となる。ぜひ、試して欲しい。

$g^{\mu'\nu'}$ は次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\left(\{g^{\mu'\nu'}\}\right) &= \left(\{\partial^{\mu'}_m\, g^{mn}\, \partial^{\nu'}_n\}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v/c \\ -\gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v/c \\ -\gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix}^T \\
&= \begin{pmatrix} -\gamma_v/c^2 & -\gamma_v\beta_v/c \\ \gamma_v\beta_v/c & \gamma_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v/c \\ -\gamma_v\beta_v c & \gamma_v \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -1/c^2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

ということで、g^{mn} と一致する。さらに、$g_{\mu'\nu'}$ の昇階と言ってもよいし、$g^{\mu'\nu'}$ の降階と言ってもよいが、$g_{\mu'}^{\nu'} = g_{\mu'\kappa'}\, g^{\kappa'\nu'}$ を計算すると、期待通り $\delta_{\mu'}^{\nu'}$ が得られる。

[例 4.4] [正規化されたミンコフスキー空間の自然基底]　式 4.8 で、時間成分として ct $(= x^0)$ を使うと正規化されるため、反変逆変換係数には c が入らない。

$$\left(\{\partial_{\mu'}^{m}\}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_v & \gamma_v\beta_v \\ \gamma_v\beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix} \tag{4.24}$$

これから自然基底の変換則が得られる。時間成分は $\boldsymbol{e}_0$ などとすべきであろうが、可視性を考え、$\boldsymbol{e}_{ct}$ などと記載する。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{e}_{ct'} &= \partial_{ct'}^{ct}\boldsymbol{e}_{ct} + \partial_{ct'}^{x}\boldsymbol{e}_x = \gamma_v\boldsymbol{e}_{ct} + \gamma_v\beta_v\boldsymbol{e}_x = 1.25\boldsymbol{e}_{ct} + 0.75\boldsymbol{e}_x \\ \boldsymbol{e}_{x'} &= \partial_{x'}^{ct}\boldsymbol{e}_{ct} + \partial_{x'}^{x}\boldsymbol{e}_x = \gamma_v\boldsymbol{e}_{ct} + \gamma_v\beta_v\boldsymbol{e}_x = 0.75\boldsymbol{e}_{ct} + 1.25\boldsymbol{e}_x \end{aligned} \tag{4.25}$$

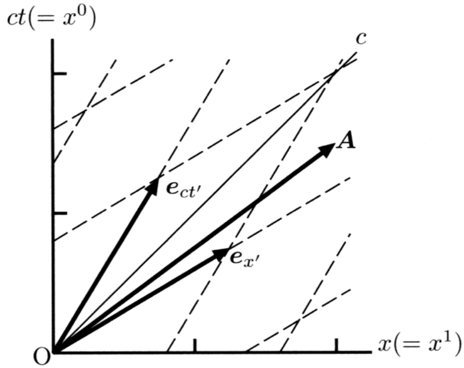


図 4.6　正規化されたミンコフスキー空間の自然基底とベクトル
（反変成分を推定せよ）

これらの自然基底を図 4.6 に示すが、斜め 45° の直線により表現されている光速の直線に対し、$\boldsymbol{e}_{ct}$ と $\boldsymbol{e}_x$、および $\boldsymbol{e}_{ct'}$ と $\boldsymbol{e}_{x'}$ が対称的に配置されている。なお、これらの式を、例 4.2 の式 4.18 と比較すると、$\boldsymbol{e}_{ct} = \boldsymbol{e}_t/c$、$\boldsymbol{e}_{ct'} = \boldsymbol{e}_{t'}/c$ であることがわかる。また、図 4.4 と比較すると、単に図形が t 方向に伸びただけでないことも観察できる。

反変順変換係数は次のようになる。

$$\left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right) = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v \\ -\gamma_v\beta_v & \gamma_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

これから、$\boldsymbol{e}^{ct} = c\,\boldsymbol{e}^t$、$\boldsymbol{e}^{ct'} = c\,\boldsymbol{e}^{t'}$ であることがわかる。$\boldsymbol{A}$ の ct 成分は、$A^{ct} = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^{ct} = c\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^t = 2\times 0.75 = 1.5$ なので、$(A^{ct}, A^x) = (1.5, 2)$ である。したがって、$(A^{ct'}, A^{x'})$ は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A^{ct'} \\ A^{x'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \partial^{ct'}_{ct} & \partial^{ct'}_{x} \\ \partial^{x'}_{ct} & \partial^{x'}_{x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{ct} \\ A^{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_v & -\gamma_v\beta_v \\ -\gamma_v\beta_v & \gamma_v \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{ct} \\ A^{x} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1.25 & -0.75 \\ -0.75 & 1.25 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.375 \\ 1.375 \end{pmatrix}\end{aligned} \tag{4.27}$$

[例 4.5] [正規化ミンコフスキー空間の双対基底]　正規化されたミンコフスキー空間の双対基底は $\partial^{\mu'}_m\,\boldsymbol{e}^m$ で計算できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}^{ct'} &= \partial^{ct'}_{ct}\boldsymbol{e}^{ct} + \partial^{ct'}_{x}\boldsymbol{e}^{x} = \gamma_v\boldsymbol{e}^{ct} - \gamma_v\beta_v\boldsymbol{e}^{x} = 1.25\boldsymbol{e}^{ct} - 0.75\boldsymbol{e}^{x} \\ \boldsymbol{e}^{x'} &= \partial^{x'}_{ct}\boldsymbol{e}^{ct} + \partial^{x'}_{x}\boldsymbol{e}^{x} = -\gamma_v\beta_v\boldsymbol{e}^{ct} + \gamma_v\boldsymbol{e}^{x} = -0.75\boldsymbol{e}^{ct} + 1.25\boldsymbol{e}^{x}\end{aligned} \tag{4.28}$$

これらを図 4.7 に示すが、$(\{\boldsymbol{e}^{\mu'}\})$ と $(\{\boldsymbol{e}_{\mu'}\})$ が正規直交していることが理解できよう。

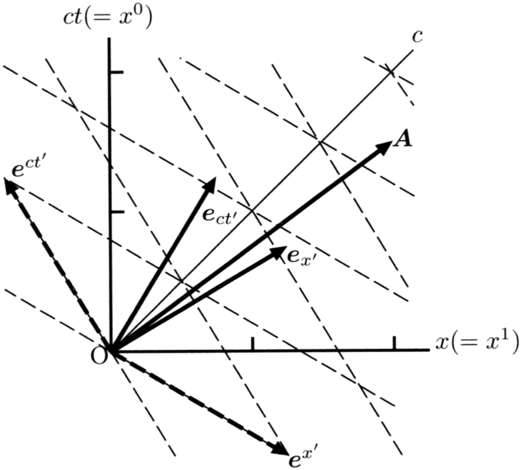


図 4.7　正規化されたミンコフスキー空間の双対基底（破線矢印）とベクトル（共変成分を推定せよ）

また、基準座標系で $(2, 1.5)$ の値を持つ $\boldsymbol{A}$ なるベクトルが、双対座標系で次のような大きな成分を持つことも読み取れよう。

$$
\begin{aligned}
\left(\{A_{\mu'}\}\right) &= \left(\{A_m\}\right)\left(\{\partial^m_{\mu'}\}\right) \\
= \begin{pmatrix} A_{ct'} & A_{x'} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1.5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.25 & 0.75 \\ 0.75 & 1.25 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 3.375 & 3.625 \end{pmatrix}
\end{aligned}
\tag{4.29}
$$

これから $\boldsymbol{A}$ の二乗長を計算することができる。

$$
A^{\mu'}A_{\mu'} = 0.375 \times 3.375 + 1.375 \times 3.625 = 6.25 \\
(= 1.5^2 + 2^2) \tag{4.30}
$$

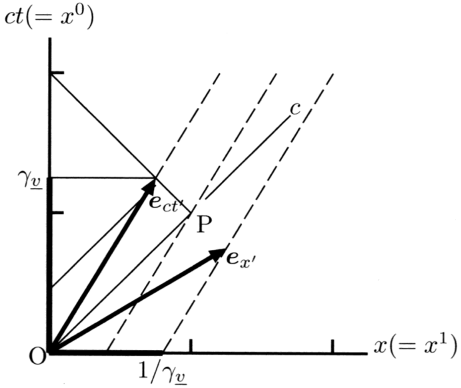


図 4.8　距離の短縮と時間の遅延

4.2　ローレンツ収縮と時間の遅れ

相対論の一つの結論として、ローレンツ収縮と時間の遅れというのがある。**ローレンツ収縮** (Lorentz contraction) とは動いているものは運動方向に収縮して見える、また**時間の遅れ** (time dilation) とは、動いている時計はゆっくり動くという概念である。ちょっと考えると、空間座標と時間座標は対称なのに、片方は縮まるのにもう片方は延びるということなのである。これは距離と時間の観測の仕方の違いからきている。なお、本節より、正規化されたミンコフスキー空間、つまり $x^0 = ct$ として議論を行う。

図 4.8 を見てみよう。長さ 1 の列車が S 系に対し、$\underline{v}$ の速度で動いている。列車の替りに x' 方向の自然基底ベクトル $\boldsymbol{e}_{x'}$ を利用する。$ct' = 0$ のときに、列車の末尾は S 系および S′ 系の共通の原点 O に

あるものとする。列車の末尾および先頭の S 系における軌跡を斜めの破線で示している。

S 系で列車の長さを測るには、末尾と先頭の位置を S 系の同時刻に読みとることである。この時刻が違っていると、列車の長さはいくらでも長くなったり、逆に短かくなってしまう。$ct = 0$ で測距すると、x 軸上の太線のようになる。この長さは $1/\gamma_v$ (< 1) である。これが何故、この値になるかは読者の計算に任せるが、列車の長さは確かに収縮することになる。

次に S$'$ 系とともに動いている時計を S 系から観測してみよう。時計が列車の末尾に載っているとし、時計が $ct' = 1$ 秒ごとに時を刻んでいるとする。$ct = ct' = 0$ で時計が動き始めたとすると、この時計の最初の刻みは $\boldsymbol{e}_{ct'}$ の先端の時空座標で行われる。この場合にも S 系の固定点、$x = 0$ で測時することとする。動いている時計をしかも離れた場所でどうやって測定するかというと、$x = 0$ から高頻度で列車に対し時刻の問い合せ信号を光速で送信する。この場合、S 系から $ct = 0.5$ に光を送信すると、列車のちょうど $ct' = 1$ のときに到達する。S$'$ 系では、問い合せ信号を受信すると、直ちに ct' が 1 であるという情報を載せて、返信信号を折り返し送付する。S 系では送信信号の発信時刻と返信信号の受信信号の二つの時刻の平均時刻が列車時刻の $ct' = 1$ に対応すると理解することになる。この時刻は、$\boldsymbol{e}_{ct'}$ 先端から ct 軸へ下した垂線の足の位置に一致し、値は γ_v (> 1)。詳細計算は読者に任せるが、S$'$ 系の時間刻みは伸びる、つまり時間は遅れることになる。

念のため、図 4.3 に示したガリレイ変換に対し、同じ作業を試みて欲しい。その場合には、距離の収縮も時間の遅れも観測されないことになり、同時刻における測距、時計からの t 軸への足による測時、の正当性が理解できよう。

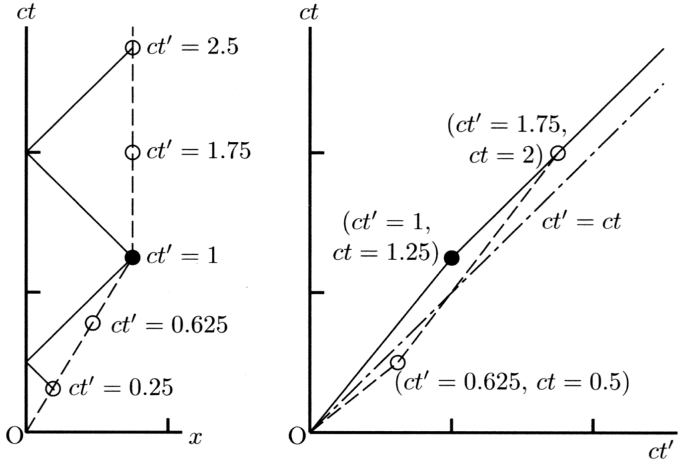


図 4.9 双子のパラドックスの解析（左図は列車の末尾の軌跡と列車内の時刻、右図実線は S 系、破線は S′ 系から観測した両時刻の対応関係、一点鎖線は $x' = x$ なる直線）

なお、多くの書に、S′ 系で時計を構成するのに、光を使う例が紹介されている。長さ 1 の列車の末尾から先頭に向って光を発射し、それを先頭で鏡で反射し、末尾へ戻すと $ct' = 2$ になり、これにより時計が構成できるというものである。ここでは列車の中央（点 P）で折り返したときの光線の軌跡を図中に示した。確かに、戻ってきた光線は $\boldsymbol{e}_{ct'}$ の先端を通過するので、これが時計となることが示されている。しかし、問題はこの時計の動きを S 系でどう観測するかである。その方法なしに、時計の議論はできない。

同じ図を用いて、S 系に固定された列車と、その末尾に置かれた時

計の刻みを S′ 系で観測するとどうなるかの議論もできる。当然、その場合にもローレンツ収縮と時間の遅れが観測できるという結果が得られる。この結果から、**双子のパラドックス (twin paradox)** という疑問がなされた。一人が地上、もう一人が列車に乗っていて、列車が終点に着いたときに相手を見ると、互いに相手の時計の方が遅く動いているため、相手が自分より若く見えるはずだが、それは認識論なら許されても、物理的は許されない結論であるという議論である。これが故に相対論は間違っているという主張が多く見受けられる。しかし、この場合には、加減速を行う列車の方を、静止している（厳密には慣性系である）S 系と対等にして議論を行うのが間違っているのである。

図 4.9 左のように、S 系の座標系に加減速を行う列車の軌跡（折れ線の軌跡でよい）を記載し、二つの時計の変化を調べてみよう。S′ 系の時計は、列車が動いているときには、$\boldsymbol{e}_{ct'}$ の長さに比例して変化するため、前図と同じ速度を仮定すれば、$x = 0.75$、$ct = 1.25$ で、$ct' = 1$ となる。これを S 系で観測すると、$ct' = 1$ は $ct = 1.25$（図中の黒点）に対応する。そこから先の時刻で列車が停止したとすると、S′ 系の時計は S 系と同じペースで増加するはずであるので、例えば、$ct' = 1.75$ は $ct = 2$ に対応する。その対応関係を図 4.9 右の実線で示す。

問題は列車に乗っている人から S 系の時計を測定するとどうなるかである。左の図面で、列車から S 系の時計の時刻を観測する作図を行うと、原点出発後しばらくは、S 系の時計は期待通りどんどん遅れていくことになる。この状況は $ct' = 0.25$ まで期待通りになる。この時刻に発信した信号は $ct = 0.5$ に折り返され、$ct' = 1$ に戻ってくる。したがって、右図の左白点で示すように、送信時刻と受信時刻の平均 $ct' = 0.625$ と $ct = 0.5$ が対応することになる。ここまでは、S′ 系で観測した S 系の時計は遅れて見えることになる。

この遅れ傾向は変化しないが、それより後の時刻になると、状況が変る。S$'$ 系からの送信信号に対する S 系の時計からの返事が、S$'$ 系に到着するときには、列車が停止してからになるためである。こうした送信信号発信と受信信号受理の間に列車停止の事態が発生するのは、$ct' = 1$ に発射した探査信号の返事が戻ってくるまでである。この受信信号は、図左より、$ct' = 2.5$ に、S 系の時刻は $ct = 2$ という情報と共に戻ってくる。S$'$ 系ではこの送信時刻と受信時刻の平均から $ct' = 1.75$ が対応するとして扱う。それを、右図の右白点で示す。この二つの白点の間の時計合せは、右図破線で示すように直線で結ばれる（読者で確認してほしい）。

つまり、列車が止る前後で、S 系の時計はどんどん進んでいくように見えることになる。その結果、二人が再会するときには、列車側の人の時計が $ct - ct' = 0.25$ だけ遅れているということで、二人共納得できる矛盾のない結果が得られる。さらに、両時計に矛盾がなくなるのには、列車が停止後しばらく後であることにも注目してほしい。それは、二人が $\Delta x = 0.75$ も離れているためである。

出発するときには何も起きなくて、停止するときだけ変なことが起きるのはおかしいと感じるかも知れないが、S 系の到着点側から測定を行うと、出発時に S$'$ 系の時計が進み、以後、S$'$ 系の時計は遅れるようになる。所詮、互いに動いている系の間ではきちんと時計を比較するとができないと割切り、直接比較できるところで矛盾がないことをもってよしとするしかない。いずれにせよ「列車に乗った人は、地上にいる人より歳を取らない」という矛盾のない結果が得られる。

4.3　四元速度

相対論の一つの結論として、どんな運動も光速を超えられないことが知られている。古典的力学では速度の和という概念があり、例えば速度 $\underline{v}$ で動いている列車内で、その列車に対し進行方向に速度 $\underline{u}$ なる運動があると、その運動を静止系から見ると、速度 $\underline{v}+\underline{u}$ に見える。この方法で光速以上が達成できるのではないかと考えるのは当然である。

そこで、S′ 系で速度 u を持つ物体の運動が S 系でどう見えるかを検討しよう。$x' = \underline{u}t'$ を式 4.8 へ代入すると、次の合成速度 $\underline{w}$ が得られる。

$$\underline{w} = \frac{x}{t} = \frac{\underline{v}+\underline{u}}{1+\underline{vu}/c^2} \tag{4.31}$$

速度を c で正規化し、$\beta_w = \underline{w}/c$、$\beta_v = \underline{v}/c$、$\beta_u = \underline{u}/c$ とすると、上式は次のようになる。

$$\beta_w = \frac{\beta_v + \beta_u}{1+\beta_v\beta_u} \tag{4.32}$$

まず、この値は明かに正である。さらに、$1-\beta_w = 1-(\beta_v+\beta_u)/(1+\beta_v\beta_u) = (1-\beta_v)(1-\beta_u)/(1+\beta_v\beta_u) > 0$ となり、β_v および β_u が 1 以下である限り、$0 < \beta_w < 1$ であることが誘導される。

この結果を図 4.10 に示すが、正規化合成速度は $\beta_v + \beta_u$ よりも常に遅くなり、その傾向は β_v や β_u が大きいほど顕著となる。また、常に 1 以下となっている。つまり、「c 以下の速度をどう合成しても、合成速度は c を超えられない」ことが示される。なお、$\underline{v}$ または $\underline{u}$ の片方が c の場合、合成速度は c となる。ここでは、同じ方向の速度ベク

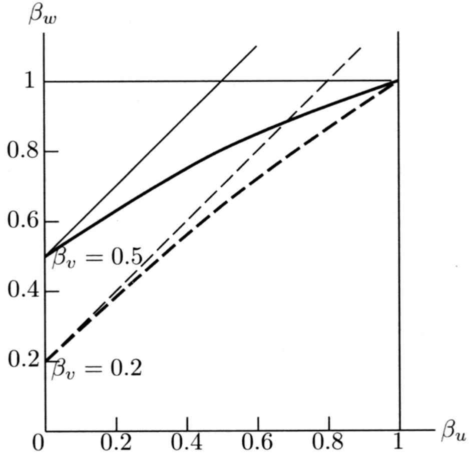


図 4.10　$\beta_v = \underline{v}/c$ 一定にし、$\beta_u = \underline{u}/c$ を変化したときの正規化された合成速度 β_w（斜めの直線は $\beta_v + \beta_u$）

トルの合成則を求めたが、$\underline{u}$ に y や z 成分があるときにも、合成速度が c を超えることはない。その証明は、読者にまかせる。

次に加速ということを考えよう。加速とは速度を時間に比例して増加していくことである。古典論ならば $\underline{v}$ を一定割合 $\underline{a}$ で $\Delta\underline{v} = \underline{a}\Delta t$ 増加すれば $\underline{v} + \Delta\underline{v} = \underline{v} + \underline{a}\Delta t$ になるということで済んでしまうが、これができるのならばあっという間に光速も跳びこえることが可能である。相対論では $\underline{v}$ と同じ速度で移動する系から見て $\Delta\underline{v} = \underline{a}\Delta t'$ 増やすということになろう。つまり、$\underline{v}$ と $\Delta\underline{v}$ の速度合成になる。合成された速度は前出の式より $(\underline{v} + \Delta\underline{v})/(1 + \underline{v}\,\Delta\underline{v}/c^2) \fallingdotseq (\underline{v}+\Delta\underline{v})(1-\underline{v}\,\Delta\underline{v}/c^2) \fallingdotseq \underline{v}+\Delta\underline{v}-\beta_v^2\Delta\underline{v} = \underline{v}+\Delta\underline{v}/\gamma_v^2 = \underline{v}+\underline{a}\Delta t/\gamma_v$ となる。ただし、$\beta_v = v/c$、$\gamma_v = \sqrt{1-\beta_v^2}$ である。また、$\Delta t' = \gamma_v\Delta t$

を利用した。この結果を見ると、古典的速度 $\underline{v}$ に対し、新たに相対論的速度を $\gamma_v \underline{v}$ と定義し、それが加速されると見なすこともできる。実際、相対論では、四元速度という概念があり、その空間成分は $\gamma_v \underline{\boldsymbol{v}}$ で定義されている。

四元速度を別観点から誘導してみよう。相対論的座標変換では、三次元空間における回転で、x と y が混ざるように、二つの座標系が互いに速度を持って移動していると、空間と時間が混ざってくる。このような場合には、ベクトルの概念を使うと便利である。当然、時間成分を加えた**四元ベクトル (four-vector)** となる。

力学におけるベクトルの代表は位置ベクトルである。これに対応する四元ベクトルは $(\{x^m\}) = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z)$ である。$(ct, \boldsymbol{r})$ とも表す。また線素 $(\{dx^m\}) = (c\,dt, dx, dy, dz) = (c\,dt,\, d\boldsymbol{r})$ も四元ベクトルである。

速度の四元ベクトルを考えよう。もともと、古典的速度は $\underline{v}_x = dx/dt$ などと定義されているが、これをそのまま第 0 成分に拡張すると $\underline{v}_{ct} = c\,dt/dt = c$ となって、第 0 成分だけ定数となってしまい、何かがおかしい。つまり、第 0 成分だけ異なる変換を受けることになってしまう。速度の分子である $(c\,dt, dx, dy, dz) = (c\,dt,\, d\boldsymbol{r})$ は確かに四元ベクトルになっているので、分母の dt の替りにそれに近いローレンツ変換不変な量を使うとうまく行きそうである。

その候補が固有距離 ds^2 を符号反転したものである。時間 t と次元を合せるため、$c^2\, d\tau^2 = -ds^2$ としてみよう。

$$c^2 d\tau^2 = -ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dx^2) \tag{4.33}$$

これより、

$$d\tau = \sqrt{dt^2 - \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{c^2}} = \sqrt{1 - \beta_v^2}\, dt = \frac{dt}{\gamma_v} \tag{4.34}$$

となる。なお、$\gamma_v = 1/\sqrt{1-\beta_v^2}$ である。粒子の速度 $\underline{v}$ が光速に比べ十分遅い場合には、$d\tau \doteqdot dt$ となっている。当然、ローレンツ変換に対し不変量である。この $d\tau$ は**固有時間** (proper time) と呼ばれる。

そこで速度の四元ベクトルである**四元速度** (four-velocity) v^m を、四元ベクトル dx^m を固有時間 $d\tau$ で割ることにより定義しよう。

$$\left(\{v^m\}\right) = (v^0, v^1, v^2, v^3) = \left(\frac{c\,dt}{d\tau}, \frac{dx}{d\tau}, \cdots\right) = \frac{dt}{d\tau}\left(\frac{c\,dt}{dt}, \frac{dx}{dt}, \cdots\right)$$
$$= \gamma_v(c, \underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z) = \gamma_v(c, \underline{\boldsymbol{v}}) \tag{4.35}$$

以後、古典的量と相対論的量の区別が難しい場合、古典的な物理量にはアンダーラインを付し、$\underline{v}^x$ のようにサフィックスは x, y, z とする。これに対し、四元量のサフィックスには v^1 や v^m のように数字または変数を用いる。

四元速度の空間成分は、低速では $\gamma_v = 1 + O(\beta_v^2)$ のため[*4]、$\boldsymbol{p} = \underline{\boldsymbol{p}} + O(\beta_v^3)$ となり、β_v の二乗近似までは、古典的速度に一致する。時間成分については、二乗近似で差が出てくるが、その詳細については次節で説明する。

4.4 四元運動量

四元速度に粒子の**静止質量** (static mass)m_0 を掛けたものとして**四元運動量** (four-momentum) p^m を定義しよう。

$$\left(\{p^m\}\right) = \left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = m_0\left(v^0, v^1, v^2, v^3\right)$$
$$= m_0\gamma_v\left(c, \underline{v}^x, \underline{v}^y, \underline{v}^z\right) = m_0\gamma_v\left(c, \underline{\boldsymbol{v}}\right) \tag{4.36}$$

[*4] O(...) とはその冪乗以上の微小量であることを示す。

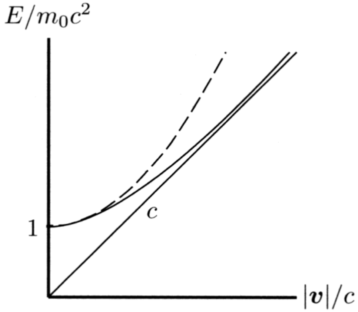


図 4.11　アインシュタインの定義による E（低速では破線に示した古典的運動エネルギーに漸近する）

これより、古典的運動量 $(\underline{p}^x, \underline{p}^y, \underline{p}^z) = \underline{\boldsymbol{p}}$ とは次式で結び付けられる。

$$\left(\{p^m\}\right)^T = \gamma_v(m_0c, \underline{p}^x, \underline{p}^y, \underline{p}^z) = \gamma_v(m_0c, \underline{\boldsymbol{p}}) \tag{4.37}$$

定義から明かなように、この量も四元ベクトルである。

四元運動量の空間成分は、低速では $\gamma_v = 1 + O(\underline{v}^2)$ のため[*5]、$\boldsymbol{p} = \underline{\boldsymbol{p}} + O(\underline{v}^3)$ となり、速度の二乗近似までは、古典的運動量に一致する。

時間成分は、次式のようになる。

$$p^0 = m_0c\gamma_v = m_0c\frac{1}{\sqrt{1-\beta_v^2}} = m_0c + \frac{1}{2c}m_0\underline{v}^2 + O(\underline{v}^4) \tag{4.38}$$

この最右辺の第二項は運動エネルギーの $1/c$ になっている。このため、cp^0 は固定分 m_0c^2 の差はあるものの、低速では限りなく古典的エネルギーに近い。そこで、アインシュタインは、cp^0 を高速で運動

[*5] O(...) とはその冪乗以上の微小量であることを示す。

している場合の全エネルギー E とした。

$$E = cp^0 = m_0c^2 \frac{1}{\sqrt{1-\beta_v^2}} = m_0c^2 \frac{c}{\sqrt{c^2 - |\underline{\boldsymbol{v}}|^2}} \tag{4.39}$$

この関係を図 4.11 に示す。問題は固定分、つまり静止時のエネルギー m_0c^2 であるが、これも以後の議論にあるように、実在すると考えられる。この結果、四元運動量は次のように書いてもよい。

$$\left(p^0, p^1, p^2, p^3\right) = \left(E/c, p^1, p^2, p^3\right) \tag{4.40}$$

$|\underline{\boldsymbol{v}}| = c$ とすると、式 4.36 より、四元運動量は γ_v に比例するため無限大になってしまう。しかし、$m_0 = 0$ ならば、四元運動量は存在しうる。このように、静止質量は 0 であるが、運動量やエネルギーは存在するという粒子はちょっと考えずらいが、実は**光子 (photon)** がそう[*6]なのである。アインシュタインが、量子力学の端緒である光子という考えを光電効果を説明する際に提案したのは、この辺に基礎がある可能性が高い。

四元運動量は単に四元速度に静止質量を掛けただけであるが、複数の互いに相互作用をおよぼしあう粒子がある場合、その合計が保存されるという重要な性質がある。空間部分については**運動量保存則 (momentum conservation law)**、時間部分についての**エネルギー保存則 (energy conservation law)** が成立し、まとめて**エネルギー運動量保存則 (energy-momentum conservation law)** と呼ばれる。証明は次節で行うが、これを使うと以下の例に示すように、粒子の生成・消滅などの計算が容易になる。

[*6] 量子力学から、周波数 f、波長 λ の光子は、エネルギー $E = hf$、$|p| = h/\lambda$ を持つ。$f = c/\lambda$ なので、$E = c|p|$ が成立する。

[例 4.6] [衝突問題] 古典的運動量は保存されないが、四元運動量は保存される例を示そう。図 4.12 右図に見られるように、S′ 系で、古典的速度 $(\underline{v}, \underline{u})$ で走っている粒子 1 と、それと同じ質量であるが、$(-\underline{v}, -\underline{u})$ で正反対に走っている粒子 2 が一点で衝突し、粒子 1 は $(\underline{v}, -\underline{u})$、粒子 2 は $(-\underline{v}, \underline{u})$ で反跳する場合を考える。この場合、明かに、衝突前の運動量と衝突後の運動量は保存される。さて、S′ 系が x 軸方向に v の速度で動いていたとすると、S 系で見た粒子 2 の運動は明かに y 軸に沿う上下運動となる。その速度を $\pm\underline{u}_2$ としよう。S 系から観測した粒子 1 の速度を $(\underline{v}_1, \underline{u}_1)$ および $(\underline{v}_1, -\underline{u}_1)$ とする。古典論では、$\underline{v}_1 = 2\underline{v}$、$\underline{u}_1 = \underline{u}_2 = \underline{u}$ であるが、相対論ではそう簡単ではない。

粒子 1 については $x_1' = \underline{v}t_1'$、$y_1' = \underline{u}t_1'$ として、式 4.8 へ代入し、$\underline{v}_1 = x_1/t_1$、$\underline{u}_1 = y_1/t_1$ を求めればよい。

$$\underline{v}_1 = \frac{x_1}{t_1} = \frac{\gamma_v(x_1' + \beta_v ct_1')}{\gamma_v(t_1' + (\beta_v/c)x_1')} = \frac{2\underline{v}}{1+\beta_v^2}$$

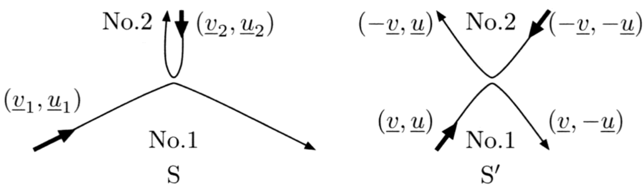


図 4.12 S′ 系（右図）で左右上下対称の二粒子の衝突を No. 2 の粒子の x 方向の速度が止って見える S 系で観測する（左図）（左図の No. 2 は厳密には折れ曲る一つの直線である）

$$\underline{u}_1 = \frac{y_1}{t_1} = \frac{\underline{u}}{\gamma_v(1+\beta_v^2)} = \frac{\underline{u}\sqrt{1-\beta_v^2}}{1+\beta_v^2}$$

粒子 2 についても $x'_2 = -\underline{v}t'_2$、$y'_2 = -\underline{u}t'_2$ として、同様の計算をする。

$$\underline{v}_2 = \frac{x_2}{t_2} = \frac{\gamma_v(x'_2 + \beta_v c t'_2)}{\gamma_v(t'_2 + (\beta_v/c)x'_2)} = \frac{-\underline{v}+\underline{v}}{1-\beta_v^2} = 0$$

$$\underline{u}_2 = \frac{y_2}{t_2} = -\frac{\underline{u}}{\gamma_v(1-\beta_v^2)} = -\frac{\underline{u}}{\sqrt{1-\beta_v^2}}$$

期待通り、$\underline{v}_2 = 0$ となっている。衝突前後の x 方向の古典的運動量は図左より明かに保存されるが、y 方向の古典的運動量は $\underline{u}_1 + \underline{u}_2 \neq 0$ のため保存されない。

式 4.36 に見られる相対論的な四元運動量の定義に従えば、衝突前の二つの粒子の y 方向の相対論的運動量は、それぞれの速度から得られる γ_v 倍したものにする必要がある。この計算でもっとも面倒なのは、二つの粒子の速度の絶対値に対する γ_1 および γ_2 である。

$$\begin{aligned}
\gamma_1 &= \frac{1}{\sqrt{1-(\underline{v}_1/c)^2-(\underline{u}_1/c)^2}} = \frac{1+\beta_v^2}{\sqrt{(1+\beta_v^2)^2-4\beta_v^2-\beta_u^2(1-\beta_v^2)}} \\
&= \frac{1+\beta_v^2}{\sqrt{(1-\beta_v^2)^2-(1-\beta_v^2)\beta_u^2}} = \frac{1+\beta_v^2}{\sqrt{(1-\beta_v^2)(1-\beta_v^2-\beta_u^2)}} \\
\gamma_2 &= \frac{1}{\sqrt{1-(u_2/c)^2}} = \frac{\sqrt{1-\beta_v^2}}{\sqrt{1-\beta_v^2-\beta_u^2}}
\end{aligned}$$

この結果を利用して、衝突前の相対論的運動量の合計を求めると、$p_1^y + p_2^y = m_0\gamma_1 u_1 + m_0\gamma_2 u_2 = 0$ となる。衝突後はこの符号を反転したものになるので、両者は等しくなる。つまり、四元運動量を使えば、古典論的運動量の矛盾は解消されるのである。

[例 4.7] [二粒子の合体]　エネルギー運動量保存則の概念は、衝突以外にも、粒子の生成、崩壊などの現象を理解する際に多いに

役立つ。例えば、二つの反対向きの四元運動量 $m_0\gamma_v(c,\ \pm\underline{v}, 0, 0)$ を持っている同一の粒子が衝突した後、接着して一粒子になったとしよう。その四元運動量は、これら二つの四元運動量を加えて、$(E/c, p^1, p^2, p^3) = 2m_0\gamma_v(c, 0, 0, 0)$ となる。E が $2m_0c^2$ ではなく $E = 2m_0\gamma_v c^2$ と、元の二粒子の速度の影響を受けることに注意してほしい。これは合成された粒子の質量が $M = 2m_0\gamma_v$ になっていることを示している。$\underline{v}/c$ が小さい古典的領域ではこの影響はほとんどないが、元の二粒子が光速に近い速度を持っていると、合成された粒子の質量は $2m_0$ に比べ、かなり大きくなるのである。

この影響はエネルギーだけではない。もし、衝突前の二粒子が x 方向の $\pm\underline{v}$ の速い運動に加え、y 方向に $\underline{u}$ でゆっくり移動していたとする。u が十分小さければ γ にはほとんど影響を与えないので、その四元運動量は $m_0\gamma_v(c,\ \pm\underline{v},\ \underline{u}, 0)$ である。したがって、合成された粒子の四元運動量は $2m_0\gamma_v(c,\ 0,\ \underline{u},\ 0)$ となる。y 方向には、当然、元の二粒子の速度 $\underline{u}$ で移動することになるが、この新粒子の y 方向の運動量は $2m_0\gamma_v\underline{u}$ になっており、やはり、$M = 2m_0\gamma_v$ の質量を持っているとしないと理解できない。

[例 4.8] [電子対発生]　光子のエネルギーがある程度あると、電子と陽電子が対発生をすることが知られている。ただし、光子一個の場合には、運動量保存則の関係で何らかの静止粒子に衝突する必要がある。この場合、静止粒子は運動量の辻褄合せのためだけに利用され、衝突後、若干の運動量を持つ。

y、z 成分は省いて議論しよう。光子の四元運動量を $(E/c,\ E/c)$、静止粒子の四元運動量を $(M_0c,\ 0)$、発生する電子および陽電子の四元運動量を[*7] $m_0\gamma_v(c, \underline{v})$、反跳する静止粒子の四元運動量を $M_0\gamma_u(c,\ \underline{u})$

[*7] 陽電子とは電子の反粒子である。反粒子というと何もかも電子の反対の性質を

とする。静止粒子は光子や電子などに比べ、圧倒的に重いため、衝突後もほとんど速度を持たないため、$\gamma_u = 1$ と近似する。衝突の前後でこれらのエネルギー運動量の辻褄が合えば、この反応は起りうることとなる。つまり、次式が成立すればよい。

$$E/c + M_0 c = 2m_0\gamma_v c + M_0 c \tag{4.41}$$

$$E/c = 2m_0\gamma_v \underline{v} + M_0 \underline{u} \tag{4.42}$$

質量の等しい電子と陽電子の 2 個を生成するため 2 が入っている。エネルギー保存則より、$E = 2m_0\gamma_v c^2$ であり、このため $E > 2m_0c^2$ が成立する必要がある。この条件を満す E を持つ光子が入ってくると、電子の γ_v、つまり $\underline{v}$ が決まる。これを第 2 式に代入すると、$\underline{u}$ がしかるべく決まって、両式とも満されることになる。

以後、ところどころに囲み文章が現われるが、これは余裕があればぜひ読んでもらいたいが、全体の流れを理解するためには、読み飛ばしても構わないことを記載している。

実はアインシュタインは四元運動量を次のように表した。

$$\left(\{p^m\}\right)^T = m\left(c, \underline{\boldsymbol{v}}\right) \qquad ただし \qquad m = m_0\gamma_v \tag{4.43}$$

さらに、m を**相対論的質量** (relativistic mass) と呼んだ。速度が光速に近付くと、相対論的質量がどんどん増加するというイメージである。この結果、全エネルギーは、以下のような著名な式で表わされる。

$$E = cp^0 = mc^2 \tag{4.44}$$

アインシュタインは特殊相対性理論を構築中に、すでに一般相対性理論

持っており、質量も負であるという勘違いもあるが、もしそうだと、電子と対消滅する際、何のエネルギー発生もなく消え去ることになり、実験事実と矛盾する。

の骨子である重力は空間の曲がりによるというイメージを持っていたのではないかと感じられる。現在、一般相対性原理では、空間を曲げる要因はエネルギーであると表現するのが主流である。しかし、ニュートンにより重力は質量が作るものという概念があったがため、アインシュタインはエネルギーのことを質量と呼んだような気がする。

どちらのイメージでも、結果は何も変らないが、現在は、古典的速度が光速に近づいてくると、静止質量は一定であるが、速度の時間成分であるエネルギーがどんどん増加していくという式 4.36 のイメージの方が主流である。以後、質量というときは、静止質量を指すものとする。

4.5　四元加速度と四元力

四元ベクトルの和や差も四元ベクトルである。v^m が四元ベクトルなので、その差分である微分量（微小量）も四元ベクトルである。したがって、四元速度をさらに τ で微分することにより、四元ベクトルである**四元加速度** (four-acceleration) が定義できる。

$$\left(\{a^m\}\right)^T = \left(\frac{dv^0}{d\tau}, \frac{dv^1}{d\tau}, \cdots\right) = \left(\frac{cd^2t}{d\tau^2}, \frac{d^2x}{d\tau^2}, \cdots\right) \tag{4.45}$$

速度や運動量までは、古典的な量との関係は γ_v を掛けるだけでよかったが、二階微分になるといきなり複雑になる。古典的な加速度との関係式を得るには、$d[\gamma_v(c, \underline{\boldsymbol{v}})]/d\tau = \gamma_v d[\gamma_v(c, \underline{\boldsymbol{v}})]/dt$ の計算を実行すればよいが、$d\gamma_v/dt$ の項が入るため、結構複雑になる。興味があれば、各自で解いてみてほしい。

$\boldsymbol{F}$ を古典的な力として、ニュートンの運動方程式は $\boldsymbol{F} = d\boldsymbol{p}/dt$ と書ける。これから、相対論における運動方程式は F^m を**四元力** (four force) として、次のようになる。

$$F^m = \frac{dp^m}{d\tau} = m_0\frac{dv^m}{d\tau} = m_0\frac{d^2x^m}{d\tau^2} \tag{4.46}$$

ニュートンの**作用・反作用の法則** (action-reaction law) は運動量保存則に繋がる。二粒子間が接触すると、それぞれの粒子の運動量は $d\boldsymbol{p} = \boldsymbol{F}d\tau$ だけ変化する。$d\tau$ は二粒子が接触している間、両粒子に共通である。一方、$\boldsymbol{F}$ は各々の粒子で方向が反対である。つまり、片方の粒子の運動量はこの量だけ増加し、もう片方の運動量はこの量だけ減少する。その結果、これら二つの粒子の合計の運動量は保存される。

また、次節の式 4.52 で述べるように、$F^0 cdt = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}$ が成立する。二粒子は接触している間、同じ時間 dt、同じ距離 $d\boldsymbol{r}$ を共有する。右辺の $\boldsymbol{F}$ は作用・反作用の法則により、各々の粒子で向きが反対であるので、F^0 も各々の粒子で符号が反転しているはずである。$dE = cdp^0 = cF^0 d\tau$ であるので、dp^0 も符号反転しており、片方のエネルギーが dE だけ増加すると、もう片方のエネルギーは dE だけ減少する。つまり二粒子の合計のエネルギーも保存される。

4.6　四元ベクトルの内積

今迄、四元ベクトルとは言ってきたが、これは本章以前で述べきた、座標と同じ変換を受けるベクトルのことである。したがって、ベクトルの内積は座標変換によって変らない不変量である。相対論の用語でこれを表わすと、四元ベクトルの内積はローレンツ変換に対し不変量である。逆に、任意のベクトルとある四元ベクトルとの内積が不変量であるとき、この任意のベクトルが四元ベクトルであることもいえる。証明は各自、行ってみてほしい。内積を反変ベクトルのみで定義しようとすると、$b_m = g_{mn}b^n$ であるため、$g_{mn}a^m b^n$ となり、g_{mn} の絡んだ定義となることに注意してほしい。四元ベクトルの内積を使っていくつかのことがいえる。

例えば四元速度の自分自身との内積、つまり長さの二乗は次のような不変量となる。

$$g_{mn}v^m v^n = g_{mn}\frac{dx^m}{d\tau}\frac{dx^n}{d\tau} = \frac{dx^2 + \cdots - c^2dt^2}{d\tau^2} = -c^2 \qquad (4.47)$$

となる。これを m^2 倍することにより、四元運動量の長さの二乗は $-(mc)^2$ となることが誘導できる。つまり、次式が成立する。

$$(p^0)^2 = (mc)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \qquad (4.48)$$

この式は E を粒子の相対論的エネルギーとして、しばしば次のように書かれる。

$$(E/c)^2 = (mc)^2 + (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2 \qquad (4.49)$$

特に質量 $m = 0$ のとき、$(E/c)^2 = (p^1)^2 + (p^2)^2 + (p^3)^2$ となる。

二つの四元速度の内積が不変量であることから、$g_{mn}v^m v^n = -c^2$ が成立するが、この式の両辺を s で微分すると次式が誘導できる。

$$g_{mn}v^m\frac{dv^n}{ds} = g_{mn}v^m a^m = -v^0a^0 + v^1a^1 + \cdots = 0 \qquad (4.50)$$

つまり、四元速度と四元加速度の内積は 0 となる。これから四元速度と四元力の内積も 0 となることが証明できる。

$$g_{mn}v^m F^n = -v^0F^0 + v^1F^1 + \cdots = 0 \qquad (4.51)$$

式 4.51 の両辺に $d\tau$ を掛けると、次の式が得られる。

$$F^0cdt = F^1dx + F^2dy + F^3dz = \boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r} \qquad (4.52)$$

右辺は古典的近似では明かにこの粒子が受ける仕事量である。つまり粒子の持つエネルギーの変化ということになる。したがって左辺の

cF^0 は単位時間当りの粒子のエネルギー増加率ということになる。式で表すと、定数差を除いて次式となる。

$$cF^0 = \frac{dE}{d\tau} \tag{4.53}$$

両辺を τ で積分すると式 4.39 の最初の等号と矛盾しない結果が得られる。

4.7　エネルギー運動量テンソル

電磁気学は相対性理論の中で重要な位置を占めている。ローレンツ変換は電磁場を元にして提案されたこともあり、アインシュタインも相対性理論の重要な骨格と考えていた。アインシュタインは、まず電磁場の四元化を果し、続いて、電磁場エネルギーや運動量の流れとマクスウェル応力も含んだ**エネルギー運動量テンソル** (energy-momentum tensor) と呼ばれる四元テンソルの導出を行った。さらにそれと荷電粒子の関係から力学系のエネルギー運動量応力テンソルという概念を導き、さらにその結果として、電磁系と力学系のテンソルの和が重要な意味を持つことを示している。しかし、一般相対性理論では、電磁場の話も電磁場のエネルギー運動量応力テンソルもほとんど出現しないため、これらの説明は付録として、第 B 章に記載した。相対性理論のもっとも美しい部分は電磁気学関係であると思っているので、余裕のある人はぜひ読んでいただきたい。

さて、第 7 章で示す一般相対性理論では、**エネルギー運動量応力テンソル** (energy-momentum-stress tensor) と呼ばれる量が四次元空間を捻じまげる原因になるという重要な役割を演ずる。これは、エネルギーや運動量の流れを現わす量であるが、空間成分を見る限り、運動量の変化率テンソル、あるいは応力テンソルという概念になっ

ている。このため、**エネルギー運動量テンソル** (energy-momentum tensor) とか、空間部分に着目して単に**応力テンソル** (stress tensor) とも呼ばれる。この章では短かく応力テンソルと呼ぼう。

さて力学系の例として、本節では沢山の質点からなる連続的な物質の応力テンソルを扱おう。質点間には相互作用があってもなくてもよいが、まず相互作用がほぼ無視できる系を考えよう。質量 m_0 の粒子が四元速度 $\boldsymbol{v}$ で動いているとすると、各粒子の持つ運動量は $\boldsymbol{p} = m_0\boldsymbol{v}$ となる。こうした粒子が微小体積内にほぼ一様な濃度 $n_0\gamma_v$ だけあって、ほぼ併走しているとする。γ_v は、静止している濃度が動くことにより、ローンレンツ収縮のために濃度上昇する率である。

この粒子全体が持つ運動量は単位体積当り $n_0\gamma_v\boldsymbol{p}$ となる。今 v^n に垂直な単位面積を考えると、単位時間に $n_0\gamma_v\underline{v}^n = n_0v^n$ の粒子がそこを通過する。通過する運動量で表現すると、$m_0\boldsymbol{v}n_0v^n$ であるが、このうち m 成分に着目すると、$m_0n_0v^mv^n$ の通過があったことになる。これを T^{mn} と記載する。

$$T^{mn} = m_0n_0v^mv^n = \mu_0v^mv^n \tag{4.54}$$

つまり、T^{mn} とは、x^m 方向の運動量密度 μ_0v^m が x^n 方向へ単位時間当り、単位面積当りに通過していく量である。もちろん μ_0 は静止時の質量密度であって、磁気定数ではない。この微小体積に、もし他から運動量が流入してこないとすると、この速度で x^m 方向の運動量は減少していくこととなる。もちろん n には制約がないので、m と等しくても構わない。

なお、$(\{T^{mn}\})$ の m 行の各要素は v^n に比例するため、次式が成立する。

$$\partial_nT^{mn} = 0 \tag{4.55}$$

この式は、付録に示した電流連続の式 B.20 に似ており、エネルギーや運動量が保存されることを示しているため、**エネルギー運動量保存則 (energy-momentum conservation law)** と呼ばれる。いろいろな応力テンソルが存在するとき、この式はより包括的な応力テンソルに対して成立する。例えば、付録第 B 章では、電磁場と相互作用する力学系が扱われるが、それぞれ、電磁系の応力テンソル、力学系の応力テンソルが定義される。しかし、エネルギー運動量保存則はこの二つの応力テンソルの和に対して成立することが導かれる。

運動量が変化するということは、その変化率に対応する力が存在することになる。こうした面を経由して運動量を変える力を応力という。応力とは、物質中に仮想的な面を考え、そこで物質を切離したときに、切断面に単位面積当りかかる力を指す。剛体の変形などの際、垂直応力（正の引張応力や負の圧縮応力）やせん断応力（横にずらす力）という言葉を聞いたことがあろう。仮想的な面の単位法線ベクトルを (n_x, n_y, n_z) とするとき、この面に働く力 (F^x, F^y, F^z) は次式で与えられる。

$$\begin{pmatrix} F^x \\ F^y \\ F^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T^{xx} & T^{xy} & T^{xz} \\ T^{yx} & T^{yy} & T^{yz} \\ T^{zx} & T^{zy} & T^{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

例えば仮想的な面として小さな $\Delta y \Delta z$ 面を考えると、$(n_x, n_y, n_z) = (1, 0, 0)$ であるため、そこでは、この面に垂直に働く引張力 T^{xx}、せん断力 T^{yx}、T^{zx} が定義できる。これを四元化したものが、式 4.54 に一致する。このため、式 4.54 を四元化された応力テンソルという。

ニュートンの運動方程式を見て、dp/dt を運動量の加速とは言わずに、力と言っているようで、やや気持の悪い表現であるが、実は、運動量の変化率と応力にはやや差があるのである。詳細は後に述べるが、応力から計算されたテンソルの方が、一般相対性理論に利用でき

るため、以後は応力テンソルとする。

古典的応力と対応ができるのは、四元応力テンソルの空間成分だけである。これを時間領域にまで拡張してみよう。まず、$T^{0n} = \mu_0 v^0 v^n = (n_0\gamma_v)(m_0\gamma_v c)\underline{v}^n$ は、最初の括弧が運動中の粒子密度、次の括弧が各質点の $p^0(=E/c)$ ということで、エネルギーフラックスの $1/c$ である。続いて $T^{m0} = \mu_0 v^m v^0 = (n_0\gamma_v)(m_0 v^m)c$ は運動量密度の x^m 成分の c 倍である。$T^{00} = \mu_0 v^0 v^0 = (n_0\gamma_v)(m_0\gamma_v c)c$ はエネルギー密度である。これらを概念的にまとめると、次のようになる。

$$\left(\{T^{mn}\}\right) = \left(\begin{array}{c|c} \text{エネルギー密度} & \text{エネルギーフラックス}/c \\ \hline \\ \text{運動量密度} \times c & \text{応力 (= 運動量減少率)} \\ \\ \end{array}\right) \tag{4.57}$$

この時間項の意味する内容のため、このテンソルはエネルギー運動量テンソル、あるいはまとめてエネルギー運動量応力テンソルとも呼ばれる。なお、対称性より「エネルギーフラックス=運動量密度 $\times c^2$」となる。

粒子間に力が働いている際は、$T^{mn} = \mu_0 v^m v^n$ とはならなくなる。例えば、粒子間に互いに斥力が働いているとすれば、圧力をかけておかないと安定化できない。今、p の圧力で安定している等方的な完全流体（粘性のない流体）を考えよう。この流体が静止しているときには、応力テンソルは以下のようになる。

$$\left(\{T^{mn}\}\right) = \mathrm{diag}(\mu_0 c^2,\ -p, -p, -p) \tag{4.58}$$

$-p$ なのは、圧力を負の応力と定義したからである。これは明かに式 4.54 では表現できない。つまり、この応力テンソルを運動量の変化率

のテンソルでは理解できないのである。こうした場合、運動量の変化率のテンソルには内部斥力の影響が入っていないため、応力から得た値の方が正しい。

この流体が運動しているときの T^{mn} を求めよう。恐らく $\mu_0 v^m v^n$ と我々の知っている唯一の四元対称テンソルである計量テンソル g^{mn} の線形結合 $T^{mn} = A\mu_0 v^m v^n + Bg^{mn}$ の可能性がある。ここで $(\{v^m\}) = (c, 0, 0, 0)$ を代入してみると、
$(\{T^{mn}\}) = \mathrm{diag}(A\mu_0 c^2 - B,\ B, B, B)$ となるが、これが式 4.58 に一致するはずであるので、$B = -p$、$A = 1 - p/\mu_0 c^2$ が得られる。

このことより応力テンソルは以下のようになる。

$$T^{mn} = (\mu_0 c^2 - p)v^m v^n / c^2 - pg^{mn} \tag{4.59}$$

一定値は微分すると消え失せるので、この応力テンソルに対しても、$\partial_n T^{mn}$ が成立する。

第 5 章

共変微分

本章からが、リーマン幾何学の真髄である。これまでの議論は、固定した一点におけるベクトルやテンソルが、座標変換によってどう変化するかについて行った。したがって、空間が曲っていようが、直線座標系やデカルト座標系のように真っ直だろうが、余り関係のない議論を行なってきた。ところが、位置を移動しはじめると、空間の曲がりの影響が現われてくる。こうした位置を移動したとき、ベクトルやテンソルがどう変化するかについて論じよう。これらの微分も位置移動した結果の差分であるため、位置微分に関する議論であるといってもよいだろう。

5.1 平行移動

リーマン幾何学において重要なのは、与えられた空間を移動することによるベクトルの変化である。デカルト座標系では、ベクトルをいくら平行に移動しても、元の位置へ戻れば元のベクトルに一致する。ところが球面上でベクトルを球面内を出ないように平行移動すると、

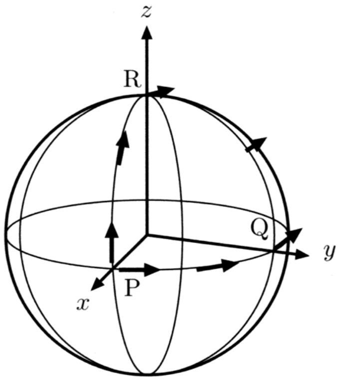


図 5.1　球面の経路 P→Q→R→P 上のベクトルの平行移動（ベクトルは対象の空間から飛び出ないように移動する。）

おかしなことが起る。例えば、**図 5.1** に示すように、地球の中心から北緯 0°、東経 0° の方向を x 軸、北緯 0°、東経 90° の方向を y 軸、北極の方向を z 軸としよう。北緯 0°、東経 0° にある点 P において y 軸方向を向いたベクトルを、赤道に沿って北緯 0°、東経 90° の点 Q まで球面からベクトルが飛び出さないように移動すると、ベクトルは $-x$ 軸方向を向く。次にそれを真北の北極点 R まで平行移動すると $-x$ 軸方向を向いたままである。最後にそれを経線に沿って再び北緯 0°、東経 0° の点 P まで平行移動してくると、ベクトルは z 軸方向を向く。つまり、ベクトルを元の位置にまで平行移動しても、平行になるとは限らないのである。

こうした議論を正確に行うには、ベクトルの**平行移動** (translation) を厳密に定義しなければならない。二次元の世界である球面幾何学は、三次元のデカルト座標系から見ると、曲り具合がよくわかる。そ

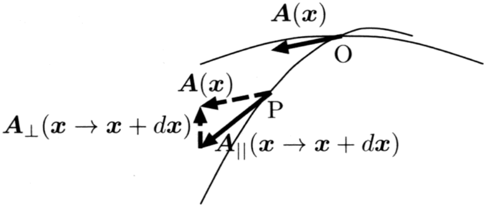


図 5.2　ベクトルの O 点 $\boldsymbol{x}$ から P 点 $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ への平行移動

れと同じように、どんな座標系でも、対象とする点の近傍に限れば、適切にやや多めの次元を持つ座標系を用意することにより、歪の具合をきれいに記述することができることが知られている。

図 5.2 に示すように、場所 O 点 $\boldsymbol{x}$ で定義された任意のベクトルを $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ としよう。これを $d\boldsymbol{x}$ 離れた点 P$\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ の位置にコピーする。このベクトルから、対象とする曲線座標系に垂線を立て、その足を終点とする $\boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ なるベクトルを考える。これをもって、平行移動されたベクトルとする。このベクトルは明かに元の $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ の位置にコピーしたもの $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ とは僅かに異なる。その差を $\boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ とすると、

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \tag{5.1}$$

が成立する。$\boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ は対象とする座標系内のベクトルであるから、$\boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ は対象とする座標系をはみ出すベクトルである。

$$\boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}_m = 0 \tag{5.2}$$

または、

$$\boldsymbol{A}_\perp(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{e}^m = 0 \tag{5.3}$$

がすべての m に対して成立するとき、$\boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ は平行移動されたベクトルと言える。つまり、平行移動とは、僅かに離れた位置にベクトルをコピーし、その射影である。

なお、平行移動の際、$d\boldsymbol{x}$ を大きくすると、平行移動ベクトルの長さが変化してしまう。例えば北緯 0° 東経 0° において東を向いたベクトルを、北緯 0° 東経 90° の位置にコピーし、その射影をとると、長さ 0 のベクトルになってしまう。しかし、これを僅かな距離ずつ行なっていけば、期待通りの平行移動が達成できる。

5.2 基底の平行移動と接続係数

基底もベクトルであるので、平行移動ができる。しかし、移動先の基底は別の原理で定義されているので、これらは一致しない。なお、本節では、説明の都合上、$\boldsymbol{x}$ からの移動ではなく、基底を $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}$ から $\boldsymbol{x}$ へ平行移動する場合を考える。例えば、北緯 45° 東経 10° にある東向きの基底を北緯 45° 東経 0° へコピーすると、明かに先端が地表から 10° 沈み、さらに、少し北に向いたベクトルになる。したがって、この射影は、ほぼ東を向いているが、若干北向きである。一方、この位置における基底は相変わらず東向きに定義されている。このように、他所から平行移動した基底と、その場所における基底とは異なるのが一般である。

以後、平行移動した基底と、その場所における基底の関係を式で調べてみよう。まず、図 5.3 に示すように、基底 $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ を場所 $\boldsymbol{x}$ にコピーしたもの（これも $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x})$ である）と、同じ基底を平行移動した $\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x})$ の関係は次のようになる。

$$\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{e}_{\perp m}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}) \tag{5.4}$$

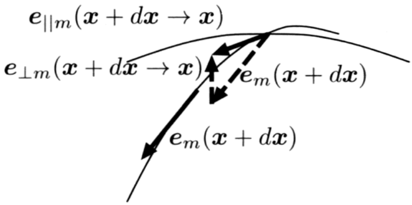


図 5.3　基底の P 点 $\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ から O 点 $\boldsymbol{x}$ への平行移動

$\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})$ は、場所 $\boldsymbol{x}$ における基底 $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})$ に近いベクトルであるが、若干のずれがある。移動量が少いとき、そのずれは移動量に比例して大きくなるので、$\boldsymbol{x}$ における基底で展開して次のように表すことができる。一次の微小量まで書くと、次式のようになる。

$$\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})+dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \tag{5.5}$$

比例係数 $\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})$ は、局所的な**アフィン変換** (affine transform) を繋いでいく係数という意味で、**アフィン接続係数** (affine connection coefficient)、または単に**接続係数** (connection coefficient) と呼ばれる。

式 5.5 を式 5.4 に代入し、$\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=dx^k\,\partial_k\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})$ を利用すると、

$$dx^k\,\partial_k\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x})+\boldsymbol{e}_{\perp m}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}) \tag{5.6}$$

が得られ、両辺に $\boldsymbol{e}^l(\boldsymbol{x})$ を掛けて、$l\to n$ とすることで次式が得られる。

$$\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{x})\cdot\partial_k\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) \tag{5.7}$$

これから $\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})$ を具体的に計算しようとしても、必ずしも容易ではない。それは、右辺にベクトルという抽象的な概念の微分商の計算が

入っているからである。しかし、次節に示すように、この式を手掛かりに、具体的な計算手法を得ることができる。

何故、こんなややこしい量を導入しなければならないかというと、そのヒントは式 5.5 にある。例えばベクトルの微分を行うときには、$\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}$ における量の処理を $\boldsymbol{x}$ において行うことになる。そのとき、基底として $\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ を用いると、得られた結果は、対象としている空間を飛び出してしまい、同じ空間内で処理できなくなってしまう。これを避けるには、$\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ を使うのがよく、そのためにこの平行移動した基底を容易に得られるようにしておく必要があるのである。

つまり、次式で与えられる基底の**全微分** (total derivative)

$$d\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})-\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=dx^k\,\partial_k\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) \tag{5.8}$$

は $(\{\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})\})$ で表現できないことがあるが、次の量

$$\delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})-\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})=dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \tag{5.9}$$

は $(\{\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})\})$ で表現できるということである。これを基底の**完全微分** (exact derivative) と呼ぼう。

双対基底の位置変化については

$$\boldsymbol{e}^{m'}_{||}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})=\boldsymbol{e}^{m'}(\boldsymbol{x})+dx^k\,\Gamma'^{m'}_{kn'}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}^{n'}(\boldsymbol{x})$$

のような展開式を仮定する。この文節では、プライムはもちろん変換先座標系ではなく、双対基底に対するものに付けている。これと式 5.5 との辺々内積をとって一次の微小量までを求める。$\boldsymbol{e}^{m'}_{||}\cdot\boldsymbol{e}_{||m}=\delta^{m'}_m$、$\boldsymbol{e}^{n'}\cdot\boldsymbol{e}_n=\delta^{n'}_n$ を利用すると、

$$\delta^{m'}_m=\delta^{m'}_m+dx^k\,\Gamma'^{m'}_{kn'}(\boldsymbol{x})\,\delta^{n'}_m+dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,\delta^{m'}_n$$

したがって、両辺からデルタ関数を消し、$m \to n$、$m' \to m$ とすると

$$\Gamma'^{m}_{kn}(\boldsymbol{x}) = -\Gamma^{m}_{kn}(\boldsymbol{x}) \tag{5.10}$$

が得られる。これから、自然基底の場合と同様に、次の式が得られる。

$$\delta \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^m_{||}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) = -dx^k\,\Gamma^m_{kn}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{x}) \tag{5.11}$$

さらに、

$$d\boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) = dx^k\,\partial_k \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) \tag{5.12}$$

を利用して、次式を得る。

$$\begin{aligned} dx^k\,\partial_k \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) \\ &= \boldsymbol{e}^m_{||}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{e}^m_{\perp}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) \\ &= -dx^k\,\Gamma^m_{kn}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{e}^m_{\perp}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x}) \end{aligned}$$

この両辺に $\boldsymbol{e}_l$ を掛けた後、$l \to n$ とすると、次式が得られる。

$$\Gamma^m_{kn}(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \cdot \partial_k \boldsymbol{e}^m(\boldsymbol{x}) \tag{5.13}$$

続いて、式 5.7 を利用して接続係数の座標変換を求めよう。

$$\begin{aligned} \Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{e}^{\nu'}(\boldsymbol{x})\,\partial_{\kappa'}\boldsymbol{e}_{\mu'}(\boldsymbol{x}) = \partial^{\nu'}_n\,\boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{x})\,\partial_{\kappa'}(\partial^m_{\mu'}\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})) \\ &= \partial^{\nu'}_n\,\boldsymbol{e}^n(\boldsymbol{x})(\partial^m_{\kappa'\mu'}\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + \partial^m_{\mu'}\,\partial^k_{\kappa'}\,\partial_k \boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})) \\ &= \partial^{\nu'}_n\,\partial^k_{\kappa'}\,\partial^m_{\mu'}\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x}) + \partial^{\nu'}_m\,\partial^m_{\kappa'\mu'} \end{aligned} \tag{5.14}$$

ここで、$\partial^m_{\kappa'\mu'}$ は二階偏微分商 $\partial^2 x^m/\partial x^{\kappa'}\partial x^{\mu'}$ である。右辺第 2 項があるため、接続係数はテンソルではない。

この式に、κ' と μ' を入替えた式を加減算すると、次の二式が得られる。

$$\frac{1}{2}\left[\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x})+\Gamma^{\nu'}_{\mu'\kappa'}(\boldsymbol{x})\right]=\partial^{\nu'}_{n}\,\partial^{k}_{\kappa'}\,\partial^{m}_{\mu'}\,\frac{1}{2}\left[\Gamma^{n}_{km}(\boldsymbol{x})+\Gamma^{n}_{mk}(\boldsymbol{x})\right]+\partial^{\nu'}_{m}\,\partial^{m}_{\kappa'\mu'} \tag{5.15}$$

$$\left[\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x})-\Gamma^{\nu'}_{\mu'\kappa'}(\boldsymbol{x})\right]=\partial^{\nu'}_{n}\,\partial^{k}_{\kappa'}\,\partial^{m}_{\mu'}\,\left[\Gamma^{n}_{km}(\boldsymbol{x})-\Gamma^{n}_{mk}(\boldsymbol{x})\right] \tag{5.16}$$

つまり、非対称部分はテンソルである。したがって、どこかの系でこれが 0 ならば、その変換先の系では常に 0 となる。幸いにして、我々の扱う多くの曲線座標系は、非対称部分 0 のデカルト座標系、またはミンコフスキー空間の中に構築されたものが多いので、以後、非対称部分は 0 の対称性を仮定して議論を行う。一方、対称部分はテンソルではない。したがって、系によっては値を有していても、系によっては 0 にできる。もちろん、この話は局所的であり、大域的に 0 にできる保証はない。

例えば、S^{n}_{km} を 3 階の k と m に関して対称で、さらに場所に依存しない一定のテンソルとして、次のような変換をしてみよう。

$$(x^{\nu'}-x^{\nu'}_{0})=\delta^{\nu'}_{l}\,\left[(x^{l}-x^{l}_{0})+S^{l}_{km}(x^{k}-x^{k}_{0})(x^{m}-x^{m}_{0})+O^{3}\right] \tag{5.17}$$

これから逆変換は

$$(x^{n}-x^{n}_{0})=\delta^{n}_{\nu'}(x^{\nu'}-x^{\nu'}_{0})-S^{n}_{km}\,\delta^{k}_{\kappa'}\,\delta^{m}_{\mu'}\,(x^{\kappa'}-x^{\kappa'}_{0})\,(x^{\mu'}-x^{\mu'}_{0})+O^{3} \tag{5.18}$$

となる。上の式の両辺を x^{n} のみ変化させるという条件で、x^{n} で偏微分し、同様に下の式の両辺を $x^{\nu'}$ で偏微分すると、

$$\partial^{\nu'}_{n}=\delta^{\nu'}_{n}+2\delta^{\nu'}_{l}\,S^{l}_{km}\,\delta^{m}_{n}\,(x^{k}-x^{k}_{0}) \tag{5.19}$$

$$\partial^{n}_{\nu'}=\delta^{n}_{\nu'}-2S^{n}_{km}\,\delta^{k}_{\kappa'}\,\delta^{m}_{\nu'}\,(x^{\kappa'}-x^{\kappa'}_{0}) \tag{5.20}$$

などが得られる。さらに式 5.20 をもう一度偏微分したものも用意し、これら三式で $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}_0$ とすると、

$$\begin{aligned}\partial^{\nu'}_{n}&=\delta^{\nu'}_{n}\\ \partial^{k}_{\kappa'}&=\delta^{k}_{\kappa'}\\ \partial^{\mu'}_{n}\,\partial^{n}_{\kappa'\nu'}&=-2\delta^{\mu'}_{n}\,\delta^{k}_{\kappa'}\,\delta^{m}_{\nu'}\,S^{n}_{km}\end{aligned}$$

が得られる。これらを式 5.15 に代入し、接続係数の対称性を仮定すると、

$$\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x}) = \delta^{\nu'}_{n}\,\delta^{k}_{\kappa'}\,\delta^{m}_{\mu'}(\Gamma^{n}_{km}(\boldsymbol{x}) - 2S^{n}_{km})$$

したがって、$S^{n}_{km} = \Gamma^{n}_{km}(\boldsymbol{x}_0)/2$ とすると、$\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x}_0) = 0$ とでき、接続係数の対称部分を消しさることができる。このような接続係数の対称部分 0 の座標系を**測地座標系** (geodesic coordinate system) と呼ぶ。

式 5.14 と同じ内容を持つ次式は、しばしば利用されるので掲載しておく。

$$\partial^{m}_{\kappa'\mu'} = \partial^{m}_{\nu'}\,\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}(\boldsymbol{x}) - \partial^{k}_{\kappa'}\,\partial^{n}_{\mu'}\,\Gamma^{m}_{kn}(\boldsymbol{x}) \tag{5.21}$$

例えば、これを利用して次のことが示される。基底の全微分を座標変換してみよう。

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{e}_{\mu'} &= dx^{\kappa'}\,\partial_{\kappa'}\boldsymbol{e}_{\mu'} = \partial^{\kappa'}_{k}\,dx^{k}\,\partial^{i}_{\kappa'}\,\partial_{i}(\partial^{m}_{\mu'}\,\boldsymbol{e}_m) \\ &= dx^{k}\,\partial_{k}(\partial^{m}_{\mu'}\,\boldsymbol{e}_m) = \partial^{m}_{\mu'}\,dx^{k}\,\partial_{k}\boldsymbol{e}_m + dx^{k}\partial^{m}_{k\mu'}\,\boldsymbol{e}_m \end{aligned}$$

のように、右辺第二項があるため、座標変換に対し不変ではない。しかし、この右辺第二項をさらに式 5.21 を利用するなどして、変形していこう。

$$\begin{aligned} dx^{k}\,\partial^{m}_{k\mu'}\,\boldsymbol{e}_m &= dx^{k}\,\partial^{\kappa'}_{k}\,\partial^{m}_{\kappa'\mu'}\,\boldsymbol{e}_m \\ &= \partial^{\kappa'}_{k}\,dx^{k}\,(\partial^{m}_{\nu'}\,\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'} - \partial^{i}_{\kappa'}\,\partial^{j}_{\mu'}\,\Gamma^{m}_{ij})\,\boldsymbol{e}_m \\ &= dx^{\kappa'}\,\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}\,\boldsymbol{e}_{\nu'} - \partial^{m}_{\mu'}\,dx^{k}\,\Gamma^{n}_{km}\,\boldsymbol{e}_n \end{aligned}$$

この式を一つ前の式へ代入し、第二項を左辺へ移項すると、

$$dx^{\kappa'}\,\partial_{\kappa'}\boldsymbol{e}_{\mu'} - dx^{\kappa'}\,\Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'}\,\boldsymbol{e}_{\nu'} = \partial^{m}_{\mu'}\,(dx^{k}\,\partial_{k}\boldsymbol{e}_m - dx^{k}\,\Gamma^{n}_{km}\,\boldsymbol{e}_n)$$

つまり、$dx^{k}\,\partial_{k}\boldsymbol{e}_m - dx^{k}\,\Gamma^{n}_{km}\,\boldsymbol{e}_n = d\boldsymbol{e}_m - \delta\boldsymbol{e}_m (= \boldsymbol{e}_{\perp m}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}))$ は座標変換に対し不変なベクトルであることがわかる。

5.3　計量テンソルと接続係数

式 5.7 により定義された接続係数 Γ^n_{km} は、高次元の直線座標系の情報がわかっていないと計算できず、かなり不便である。幸いにして接続係数の値は、部分空間の曲線座標系の計量テンソルから計算可能である。証明はやや面倒であるが、興味のある人は下の囲みを見てほしい。

$$\Gamma^n_{km} = \frac{1}{2} g^{nl} \left(\partial_k g_{ml} + \partial_m g_{kl} - \partial_l g_{km}\right) \tag{5.22}$$

これにより、いちいち高次元の直線座標系へ戻ることなく、議論ができる基盤ができたことになる。

なお、この式の右辺を次式のように書いて、**クリストッフェル記号** (Christoffel symbol) と言う。

$$\begin{Bmatrix} n \\ km \end{Bmatrix} \quad (= \Gamma^n_{km}) \tag{5.23}$$

つまり、対称系では接続係数はクリストッフェル記号と一致する。ただし、本書ではこの記号は用いない。

式 5.7 の両辺に g_{nl} を掛けて降階してみよう。なお、以下の式変形で、(x) は省略して記載する。

$$g_{nl}\, \Gamma^n_{km} = \boldsymbol{e}_l \cdot \partial_k \boldsymbol{e}_m \tag{5.24}$$

この式を利用して、次の三式が誘導できる。

$$\begin{aligned}
\partial_k g_{ml} &= \partial_k (\boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_l) = \partial_k \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_l + \boldsymbol{e}_m \cdot \partial_k \boldsymbol{e}_l = g_{nl}\, \Gamma^n_{km} + g_{nm}\, \Gamma^n_{kl} \\
\partial_m g_{lk} &= g_{nk}\, \Gamma^n_{ml} + g_{nl}\, \Gamma^n_{mk} \\
\partial_l g_{km} &= g_{nm}\, \Gamma^n_{lk} + g_{nk}\, \Gamma^n_{lm}
\end{aligned} \tag{5.25}$$

これらの式は、後に g_{mn} の変換の際利用されるが、上記 1 式 +2 式 −3 式を実行し、左右を入れ替えると、次式が得られる。

$$2g_{nl}\,\Gamma^n_{km} = \partial_k g_{ml} + \partial_m g_{lk} - \partial_l g_{km}$$

両辺を 2 で割り、左辺の g_{nl} を昇階すると、計量テンソルから接続係数を得る式が得られる。

ここで、接続係数の具体的な算出方法が確定したので、例を挙げておこう。

[例 5.1] [二次元極座標系]　二次元極座標系の計量は、例 2.7 および例 3.4 で示したように以下のようになる。

$$(\{g_{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, r^2)$$
$$(\{g^{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, 1/r^2)$$

デカルト座標系に定義された曲線座標系は、デカルト座標系が対称系であるため、すべて対称系となる。したがって、接続係数はクリストッフェル記号で算定できる。二次元空間であるため、接続係数は $2\times 2\times 2 = 8$ 項しかない。式と接続係数の計算式を再掲しておこう。

$$\Gamma^k_{mn} = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_m g_{ln} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn})$$

$k = r$ であると、g^{kl} の成分から見て、$l = r$ としてよい。

$$\Gamma^r_{mn} = \frac{1}{2}(\partial_m g_{rn} + \partial_n g_{mr} - \partial_r g_{mn}) = -\frac{1}{2}\partial_r g_{\phi\phi}\,\delta^\phi_m\,\delta^\phi_n = -r\,\delta^\phi_m\,\delta^\phi_n$$

$k = \phi$ であると、g^{kl} の成分から見て、$l = \phi$ としてよい。

$$\Gamma^\phi_{mn} = \frac{1}{2r^2}(\partial_m g_{\phi n} + \partial_n g_{m\phi} - \partial_\phi g_{mn}) = \frac{1}{r}\,(\delta^r_m\,\delta^\phi_n + \delta^\phi_m\,\delta^r_n)$$

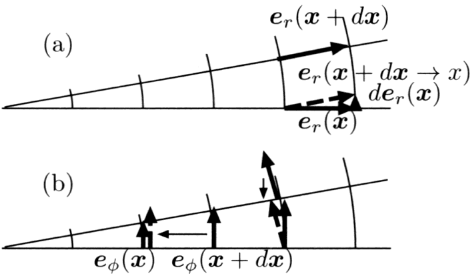


図 5.4　二次元極座標系における基底の位置による変動

これらの結果をまとめると、次の 3 項目を除いて残りは 0 であることがわかる。

$$\begin{aligned} \Gamma^r_{\phi\phi} &= -r \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = 1/r \end{aligned} \tag{5.26}$$

したがって、基底の完全微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \delta\boldsymbol{e}_r &= dr\,(\Gamma^r_{rr}\,\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\phi_{rr}\,\boldsymbol{e}_\phi) + d\phi\,(\Gamma^r_{\phi r}\,\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\phi_{\phi r}\,\boldsymbol{e}_\phi) = d\phi\,(1/r)\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \delta\boldsymbol{e}_\phi &= dr\,(\Gamma^r_{r\phi}\,\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\phi_{r\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi) + d\phi\,(\Gamma^r_{\phi\phi}\,\boldsymbol{e}_r + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi) \\ &= dr\,(1/r)\,\boldsymbol{e}_\phi + d\phi\,(-r)\,\boldsymbol{e}_r \end{aligned} \tag{5.27}$$

これを図 5.4 に示そう。

(a) は $\boldsymbol{e}_r$ を $d\phi$ 動かした場合で、$\phi + d\phi$ の位置にある基底と ϕ の位置にある基底を比較する際、$\phi + d\phi$ の位置にある基底を平行移動し $e_{||r}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})$ とし、それと比較をしている。その差である短いベクトルが $\delta\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{x})$ である。$\delta\boldsymbol{e}_r(\boldsymbol{x})$ の長さは一定であるが、$\boldsymbol{e}_\phi$ の長さが r に比例するため、$1/r$ の係数が付くのが理解できよう。この場合、r 方向に移動しても、基底は変化しないので、図示していない。

(b) は $\boldsymbol{e}_\phi$ の変動を示しているが、左の一組は r 方向へ移動したときの基底の変動を図示している。いつも ϕ 方向に一定の差が生じるが、$\boldsymbol{e}_\phi$ の長さが r に比例するため、$1/r$ の係数が付く。(b) の右の一組は $\boldsymbol{e}_\phi$ を ϕ 方向に移動した場合で、その差は $\boldsymbol{e}_r$ の負方向であり、r に比例する。

[例 5.2] [球面幾何学]　球面上の座標系の計量は、例 2.9 および例 3.5 で示したように以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
(\{g_{mn}\}) &= a^2 \operatorname{diag}(1, \sin^2\theta) \\
(\{g^{mn}\}) &= (1/a^2) \operatorname{diag}(1, 1/\sin^2\theta)
\end{aligned}
$$

この座標系もデカルト座標系の上に定義された対称系であり、クリストッフェル記号が利用できる。二次元空間であるので、接続係数は $2 \times 2 \times 2 = 8$ 個ある。$k = \theta$ であると、g^{kl} の成分から見て、$l = \theta$ としてよい。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{mn} &= \frac{1}{2a^2}(\partial_m g_{\theta n} + \partial_n g_{m\theta} - \partial_\theta g_{mn}) = -\frac{1}{2a^2}\partial_\theta g_{mn} \\
&= -\sin\theta\cos\theta\,\delta^\phi_m\delta^\phi_n
\end{aligned}
$$

$k = \phi$ であると、g^{kl} の成分から見て、$l = \phi$ としてよい。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\phi_{mn} =& \frac{1}{2a^2\sin^2\theta}(\partial_m g_{\phi n} + \partial_n g_{m\phi} - \partial_\phi g_{mn}) \\
=& \frac{2\sin\theta\cos\theta}{2\sin^2\theta}(\delta^\theta_m\delta^\phi_n + \delta^\phi_m\delta^\theta_n)
\end{aligned}
$$

これらの結果をまとめると、次の 3 項目を除いて 0 であることがわかる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\
\Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

したがって、基底の完全微分は次式で与えられる。

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{e}_\theta &= d\theta\,(\Gamma^\theta_{\theta\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \Gamma^\phi_{\theta\theta}\,\boldsymbol{e}_\phi) + d\phi\,(\Gamma^\theta_{\phi\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta + \Gamma^\phi_{\phi\theta}\,\boldsymbol{e}_\phi)\\ &= d\phi\,(\cos\theta/\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\phi\\ \delta\boldsymbol{e}_\phi &= d\theta\,(\Gamma^\theta_{\theta\phi}\,\boldsymbol{e}_\theta + \Gamma^\phi_{\theta\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi) + d\phi\,(\Gamma^\theta_{\phi\phi}\,\boldsymbol{e}_\theta + \Gamma^\phi_{\phi\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi)\\ &= d\theta\,(\cos\theta/\sin\theta)\,\boldsymbol{e}_\phi + d\phi\,(-\sin\theta\,\cos\theta)\,\boldsymbol{e}_\theta\end{aligned}$$

$\theta = 0$ の極付近では、二次元極座標系に近い結果となるはずである。実際、二次元極座標系の dr を θ に対応させると、同じ結果となる。また $\theta = \pi/2$ の赤道付近では、接続係数はすべて 0 となり、比較的平坦な空間と同様となる。

5.4　空間変化するベクトル場と共変微分

重力場、電磁場などに代表されるベクトル場は場所とともにゆっくり変動する。こうしたベクトル場 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の位置変動を調べよう。一般ベクトルについても、差分ベクトルを $d\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ とするのは問題がある。$\boldsymbol{x}$ の場所で差分をとるとして、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ は、考えている空間の次元をはみ出す可能性があるからである。そこで、基底の移動と同様に、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ を平行移動した $\boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})$ を利用すればよい。これは $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x})$ を $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})$ で基底展開し、その成分を維持したまま、基底を平行移動してくることで求めることができる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}) &= A^m_{||}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})\\ &= (A^m(\boldsymbol{x}) + dA^m(\boldsymbol{x}))\,(\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + \delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}))\\ &= A^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + dA^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + A^m(\boldsymbol{x})\,\delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})\\ &= \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) + dA^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + A^m(\boldsymbol{x})\,\delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x})\end{aligned}$$

ここで、$\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ を次式で定義し、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ の**完全微分** (exact derivative) としよう。

$$\begin{aligned}\delta\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) \\ &= dA^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + A^m(\boldsymbol{x})\,\delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) \\ &= dA^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) + dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,A^m(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \quad (5.29)\end{aligned}$$

この完全微分が自然基底の変動を表す式 5.9 と比較してやや複雑なのは、$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x})$ に自然基底の変動に加え、ベクトル場としての空間の変動が加わるからである。以後、場所の関数を示す $(\boldsymbol{x})$ は省略して議論しよう。$\delta\boldsymbol{A}$ の反変成分 δA^m は次のようになる。

$$\delta A^m = \delta\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}^m = dA^m + dx^k\,\Gamma^m_{kn}\,A^n \qquad (5.30)$$

第一項は位置変化による $\boldsymbol{A}$ の成分の形式的な変動分であるが、第二項でその中に含まれるベクトルの単純平行移動による変動分を相殺し、全体として実質的なベクトルの成分の変化を求めている。

偏微分商の計算のように、ある特定な k に対し、dx^k だけを増加した際の $\delta A^m/dx^k$ を $= \delta A^m/dx^k|_k$ と書こう（右の縦線'$|_k$' は dx^k 以外が 0 の場合の比であることを示している）。これをベクトルの反変成分の**共変微分商** (covariant differential)$\nabla_k\,A^m$ と呼ぶ。

$$\nabla_k\,A^m = \left.\frac{\delta A^m}{dx^k}\right|_k = \left.\frac{dA^m}{dx^k}\right|_k + \Gamma^m_{kn}\,A^n = \partial_k A^m + \Gamma^m_{kn}\,A^n \quad (5.31)$$

共変微分商を含む長い計算をするとき、$\nabla_k\,A^m$ はしばしば $A^m_{:k}$ と記載される。本書では可能な限り、∇_k を使うこととし、コロンを使う場合には、それを明示することとする。

$\partial_k A^m$ は 2 階の混合テンソルのように見える。しかし、座標変換し

てみるとうまくいかない。

$$
\begin{aligned}
\partial_{\kappa'} A^{\mu'} &= \partial_{\kappa'} (\partial^{\mu'}_{m}\, A^m) = \partial^{\mu'}_{m}\, \partial_{\kappa'} A^m + \partial^{\mu'}_{\kappa' m}\, A^m \\
&= \partial^{k}_{\kappa'}\, \partial^{\mu'}_{m}\, \partial_k A^m + \partial^{k}_{\kappa'}\, \partial^{\mu'}_{kn}\, A^n \\
&= \partial^{k}_{\kappa'}\, \partial^{\mu'}_{m}\, \partial_k A^m + \partial^{k}_{\kappa'}\, (\partial^{\mu'}_{m}\, \Gamma^m_{kn} - \partial^{\iota'}_{k}\, \partial^{\nu'}_{n}\, \Gamma^{\mu'}_{\iota' \nu'})\, A^n \\
&= \partial^{k}_{\kappa'}\, \partial^{\mu'}_{m}\, (\partial_k A^m + \Gamma^m_{kn}\, A^n) - \Gamma^{\mu'}_{\kappa' \nu'}\, A^{\nu'}
\end{aligned}
$$

第三行目の等号には式 5.21 の逆変換を利用した。第一行右辺の第一項だけならばテンソルの混合成分であるが、第二項があるためにうまくいかないのである。しかし、式変形後の第四行の最終項を左辺へ移動することにより、$\partial_n A^m + \Gamma^m_{kn}\, A^k$ が混合テンソルとなることが直ちにわかろう。それが式 5.31 に示した $\nabla_n\, A^m$ なのである。

考えてみれば ∇_n は不変量であり、その m 成分である δA^m は反変ベクトルとなり、さらにその位置ベクトルによる微分商が混合テンソルになることは容易に想像できる。以後に示す共変ベクトルの微分商やテンソルの微分商でも $\delta \boldsymbol{A}$ は共変的であり、このことから、この記号は**共変微分** (covariant derivative) と呼ばれる。

なお、div $\boldsymbol{A}$ はデカルト座標系では $\partial_m A^m$ であるので、曲線座標系では次式で定義できる。

$$
\operatorname{div} \boldsymbol{A} = \nabla_m\, A^m = \partial_m A^m + \Gamma^m_{mn}\, A^n \tag{5.32}
$$

ベクトルの共変成分に対しても、反変成分と同様な作業を行うことができる。

$$
\begin{aligned}
\delta \boldsymbol{A} &= \boldsymbol{A}_{||}(\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}) - \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}) = \delta(A_m\, \boldsymbol{e}^m) \\
&= dA_m\, \boldsymbol{e}^m + A_m\, \delta \boldsymbol{e}^m = dA_m\, \boldsymbol{e}^m - dx^k\, \Gamma^m_{kn}\, A_m\, \boldsymbol{e}^n
\end{aligned}
$$

$\delta \boldsymbol{A}$ の共変成分を δA_m と書いて、

$$
\delta A_m = \delta \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{e}_m = dA_m - dx^k\, \Gamma^n_{km}\, A_n \tag{5.33}
$$

この結果、ベクトルの共変成分の共変微分商 $\nabla_k A_m$ は次式のようになる。

$$\nabla_k A_m = \left.\frac{\delta A_m}{dx^k}\right|_k = \left.\frac{dA_m}{dx^k}\right|_k - \Gamma^n_{km} A_n = \partial_k A_m - \Gamma^n_{km} A_n \quad (5.34)$$

$\nabla_k A_m$ については、反変成分の微分商のように $A_{m:k}$ と記載されることがある。

$\partial_k A_m$ の座標変換もうまくいかない。

$$\begin{aligned}\partial_{\kappa'} A_{\mu'} &= \partial_{\kappa'} (\partial^m_{\mu'} A_m) = \partial^m_{\mu'} \partial_{\kappa'} A_m + \partial^n_{\kappa'\mu'} A_n \\ &= \partial^m_{\mu'} \partial^k_{\kappa'} \partial_k A_m + (\partial^n_{\nu'} \Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'} - \partial^k_{\kappa'} \partial^m_{\mu'} \Gamma^n_{km}) A_n \\ &= \partial^k_{\kappa'} \partial^m_{\mu'} (\partial_k A_m - \Gamma^n_{km} A_n) + \Gamma^{\nu'}_{\kappa'\mu'} A_{\nu'}\end{aligned}$$

第二行の第一項だけならばテンソルの共変成分であるが、第二項があるためにうまくいかないのである。しかし、第三行を見ると、式 5.34 に示した $\nabla_n A_m$ ならば共変テンソルとして、うまく座標変換できることが明かである。

完全微分を dx^k で除したものを共変微分商と呼ぶならば、式 5.9 で定義した $\delta \boldsymbol{e}_m$ や式 5.11 で定義した $\boldsymbol{e}^m$ を dx^k で除したものも定義可能である。

$$\nabla_k \boldsymbol{e}_m = \left.\frac{\delta \boldsymbol{e}_m}{dx^k}\right|_k = \Gamma^n_{km} \boldsymbol{e}_n \quad (5.35)$$

$$\nabla_k \boldsymbol{e}^m = \left.\frac{\delta \boldsymbol{e}^m}{dx^k}\right|_k = -\Gamma^m_{kn} \boldsymbol{e}^n \quad (5.36)$$

5.5 テンソルの共変微分

任意のテンソルの共変微分や共変微分商はどうなるのであろうか。こうした考察を行う際、次の各定理を知っていると便利である。

テンソルの加法　同種のテンソルの和や差は同種のテンソルになる。

テンソルの乗法　テンソルとテンソルの積はテンソルになる。スカラーはその意味で、0次のテンソルであり、座標変換に対して不変となる。

テンソルの縮約　テンソルを縮約したものはテンソルである。

テンソルの商法則　二つの量の積がテンソルのとき、そのうちの一つがテンソルならば、もう一つもテンソルである。

> これらの証明はテンソルの種類を仮定すれば、座標変換を使って比較的簡単にできるので各自に任せるが、参考に商法則のみ示しておこう。次のようにテンソルかどうかわからない二次の量 A_m^n と一次のテンソル B_k の積がテンソルだったとしよう。その座標変換した結果を $A_{\mu'}^{\nu'} B_{\kappa'}$ とすると、
>
> $$(A_{\mu'}^{\nu'}\, B_{\kappa'}) = \partial_{\mu'}^{m}\, \partial_{n}^{\nu'}\, \partial_{\kappa'}^{k}\, (A_m^n B_k)$$
>
> が成立する。一方、$B_{\kappa'} = \partial_{\kappa'}^{k}\, B_k$ であるので、この式を左辺へ代入し、両辺から共通項を削除することにより、次式が得られる。
>
> $$A_{\mu'}^{\nu'} = \partial_{\mu'}^{m}\, \partial_{n}^{\nu'}\, A_m^n$$
>
> これより A_m^n がテンソルであることが証明された。

さて、まずスカラーの共変微分を求めてみよう。ベクトルの成分の共変微分が接続係数を含む複雑な変換を受けるのは、基底が変化するからである。スカラーは基底とは関係ない量であるので、共変微分も偏微分も何ら変らない。したがって次式が成立する。

$$\delta f = df \tag{5.37}$$

$$\nabla_k f = \partial_k f \tag{5.38}$$

ベクトルの反変成分の共変微分に $+dx^k\, \Gamma_{kn}^{m}\, A^n$ が入り、一方ベクトルの共変成分の共変微分に $-dx^k\, \Gamma_{km}^{n}\, A_n$ が入ることから、反変でも共変でもないスカラーについてはこうなることが予測できよう。

任意のテンソルの共変微分を求める際、テンソルの積の共変微分に対し、積の偏微分のような部分微分の法則が成り立つことを利用する。例えば、

$$
\begin{aligned}
\delta(T_m^{nk}\,U_l^i) &= T_{||m}^{nk}(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x})\,U_{||l}^i(\boldsymbol{x}+d\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{x}) - T_m^{nk}(\boldsymbol{x})\,U_l^i(\boldsymbol{x}) \\
&= (T_m^{nk}(\boldsymbol{x}) + \delta T_m^{nk}(d\boldsymbol{x}))\,(U_l^i(\boldsymbol{x}) + \delta U_l^i(\boldsymbol{x})) - T_m^{nk}(\boldsymbol{x})\,U_l^i(\boldsymbol{x}) \\
&= \delta T_m^{nk}\,U_l^i(\boldsymbol{x}) + T_m^{nk}\,\delta U_l^i(\boldsymbol{x})
\end{aligned}
$$

それでは、例えば T_m^n の共変微分を求めてみよう。これに適切に反変やら共変ベクトル成分を掛けると $T_m^n u^m v_n$ のようなスカラー量を得ることができる。この共変微分を計算してみよう。

$$
\begin{aligned}
\delta(T_m^n\,u^m\,v_n) &= \delta T_m^n\,u^m\,v_n + T_m^n\,\delta u^m\,v_n + T_m^n\,u^m\,\delta v_n \\
&= \delta T_m^n\,u^m\,v_n \\
&\quad + T_m^n\,(du^m + dx^a\,\Gamma_{ab}^m\,u^b)\,v_n + T_m^n\,u^m\,(dv_n - dx^a\,\Gamma_{an}^b\,v_b)
\end{aligned}
$$

一方、スカラー量の完全微分は式 5.37 より、全微分と等しいので、次式が成立する。

$$
\begin{aligned}
\delta(T_m^n\,u^m\,v_n) &= d(T_m^n\,u^m\,v_n) \\
&= dT_m^n\,u^m\,v_n + T_m^n\,du^m\,v_n + T_m^n\,u^m\,dv_n
\end{aligned}
$$

両式の最右辺を比較し、両辺から等しい項を削除し、さらに両辺を $u^m v_n$ で割ると、次式が得られる。

$$
\delta T_m^n = dT_m^n - dx^k\,\Gamma_{km}^l\,T_l^n + dx^k\,\Gamma_{kl}^n\,T_m^l
$$

これから、テンソルの共変サフィックスに対しては負号、反変サフィックスについては正号をつけた接続係数を並べればよいことがわかる。サフィックスはアインシュタイン規約を守るように、適宜配置すればよい。特定の dx^k のみを変化するという条件下で、両辺を dx^k

で割ることにより、テンソルの共変微分商を接続係数を用いて記述できる。

$$\begin{aligned}\nabla_k T^n_m = \left.\frac{\delta T^n_m}{dx^k}\right|_k &= \left.\frac{dT^n_m}{dx^k}\right|_k - \Gamma^l_{km} T^n_l + \Gamma^n_{kl} T^l_m \\ &= \partial_k T^n_m - \Gamma^l_{km} T^n_l + \Gamma^n_{kl} T^l_m \end{aligned} \tag{5.39}$$

もっと高次のテンソルの共変微分商も同様に定義できる。この規則を g_{mn} に適用してみると、

$$\nabla_k g_{mn} = \partial_k g_{mn} - \Gamma^l_{km} g_{ln} - \Gamma^l_{kn} g_{ml} = 0 \tag{5.40}$$

この際、接続係数および計量テンソルの対称性と式 5.25 の関係を使った。また、$g^n_m = \delta^n_m$ は、

$$\nabla_k g^n_m = \partial_k g^n_m - \Gamma^l_{km} g^n_l + \Gamma^n_{kl} g^l_m = 0 \tag{5.41}$$

この際、第一項は 0、第二項と第三項は $g^n_l = \delta^n_l$ などから共に Γ^n_{km} となり打ち消し合う。さらに、g^{mn} は、

$$\nabla_k g^{mn} = \partial_k g^{mn} + \Gamma^m_{kl} g^{ln} + \Gamma^n_{kl} g^{ml} = 0 \tag{5.42}$$

この際、式 5.25 に対応する次式を利用した (証明は略す)。

$$\begin{aligned}\partial_k g^{mn} &= \partial_k(\boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^n) = \boldsymbol{e}^m \cdot \partial_k \boldsymbol{e}^n + \boldsymbol{e}^n \cdot \partial_k \boldsymbol{e}^m \\ &= -\Gamma^n_{kl} g^{ml} - \Gamma^m_{kl} g^{ln}\end{aligned} \tag{5.43}$$

5.6　測地線

曲線座標系には**測地線** (geodesic line) と呼ばれる概念がある。これはデカルト座標系における直線のようなもので、通常は、二点間を接

続するいくつかの曲線のうちでもっとも短いものと定義される。より厳密には停留といって、ある曲線の付近で曲線を僅かに変形させたとき、その長さがほとんど変化しないとき、その曲線を測地線と言う。したがって、長さが最短、極小、最長、極大、さらには鞍部のような停留も存在する。例えば、球面の任意の二点を結ぶ曲線で、測地線は大円になることが知られているが、短い方の円弧は最短の測地線であるが、長い方の円弧はすぐ近傍に作成した小円の方が短いので、極小でもないし、さらにぐにゃぐにゃと曲げればいくらでも長くなるので極大でもなく、鞍部のような意味での停留曲線である。

さて、t を媒介変数として、曲線を $x^m(t)$ と表わそう。この曲線の長さは $\dot{x}^m = dx^m/dt$ として

$$I = \int ds = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{g_{mn}(\boldsymbol{x})\, dx^m(t)\, dx^n(t)} = \int_{t_0}^{t_1} dt \sqrt{g_{mn}(\boldsymbol{x})\, \dot{x}^m\, \dot{x}^n}$$

この被積分関数を $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ とすると、

$$L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}}) = \sqrt{g_{mn}(\boldsymbol{x})\, \dot{x}^m\, \dot{x}^n}$$

である。このようにある量 I が $\boldsymbol{x} = (\{x^m\})$ や $\dot{\boldsymbol{x}} = (\{\dot{x}^m\})$ を含む関数 L の積分で与えられる場合、これを停留化する条件は、次の**オイラー方程式 (Euler equation)** で与えられる (証明は他書を参考にされたい)。

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^k}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^k} = 0$$

この式へ $L(\boldsymbol{x}, \dot{\boldsymbol{x}})$ を代入すると、

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{g_{kn}\, \dot{x}^n}{L}\right) - \frac{\partial_k g_{mn}\, \dot{x}^m\, \dot{x}^n}{2L}$$
$$= \frac{g_{kn}\, \ddot{x}^n}{L} + \frac{\partial_m g_{kn}\, \dot{x}^m\, \dot{x}^n}{L} - \frac{g_{kn}\, \dot{x}^n\, (dL/dt)}{L^2} - \frac{\partial_k g_{mn}\, \dot{x}^m\, \dot{x}^n}{2L} = 0$$

最後の等号の両辺に L を掛け、さらに第二項を半分にして二項に書き換えると、

$$g_{kn}\,\ddot{x}^n + \frac{1}{2}\left(\partial_m g_{kn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n + \partial_n g_{km}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n - \partial_k g_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n\right) = \frac{g_{kn}\,\dot{x}^n\,(dL/dt)}{L}$$

ここで媒介変数 t として、曲線の始点からの距離 s を使うことにすると、$L = ds/dt = 1$、$dL/dt = 0$ となり、式が簡略化できる。さらに、g^{kl} を掛けて式全体を昇階し、$l \to k$ とすると、式 5.22 を利用して、次式が得られる。

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n = 0 \tag{5.44}$$

なお、この式以後、$\dot{x}$ などは、s による微分を表わすものとする。これが**測地線** (geodesic line) の方程式である。なお、証明は省くが、相対性原理で現われる光線の式は $ds^2 = 0$ を満すが、その場合でも、s を媒介変数として、光の測地線の式は上式で与えられる。

測地線は、ベクトルを方向を変えずにどんどん繋いでいって完成する線でもある。曲線座標系での直線は、s を媒介変数として、s の変化に対し $v^k = \dot{x}^k$ が一定という条件で記述できる。

$$\frac{\delta v^k}{ds} = 0$$

この左辺を変形してみよう。

$$\frac{\delta v^k}{ds} = \frac{dv^k + \Gamma^k_{mn}\,v^m\,dx^n}{ds} = \dot{v}^k + \Gamma^k_{mn}\,v^m\,v^n = 0$$

この式は前出の式 5.44 とまったく同じであり、接続係数を利用したベクトルの平行移動という概念が有効であることを示している。

[例 5.3] [二次元極座標系]　例 5.1 より、0 でない接続係数は $\Gamma^{\phi}_{\phi r} = 1/r$、$\Gamma^{\phi}_{r\phi} = 1/r$、$\Gamma^{r}_{\phi\phi} = -r$ の三つである。これから次の測地線方程式が得られる。

$$\begin{aligned} \dot{v}^r - r\, v^{\phi}\, v^{\phi} &= 0 \\ \dot{v}^{\phi} + 2\, v^r\, v^{\phi}/r &= 0 \end{aligned} \tag{5.45}$$

この後式を r^2 倍すると、下記のように書き直すことができる。

$$\frac{d(r^2\, v^{\phi})}{ds} = 0$$

これから α を定数として、

$$v^{\phi} = \frac{\alpha}{r^2} \tag{5.46}$$

が得られる。

これを前式に代入し、両辺に $2v^r$ を掛けると

$$2v^r\, \dot{v}^r = 2\frac{\alpha^2}{r^3}\, v^r$$

$$\frac{d[(v^r)^2]}{ds} = -\alpha^2\, \frac{d(r^{-2})}{ds}$$

これより

$$v^r = \dot{r} = \sqrt{\beta^2 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2}$$

v^r を求めるにはもっと簡単な方法が知られている。それは線素の式 $ds^2 = dr^2 + r^2 d\phi^2$ を使うのである。この両辺を ds^2 で割ると、

$1 = (v^r)^2 + r^2(v^\phi)^2$ が得られるので、式 5.46 を代入して直ちに、前式と同じ式が得られるだけでなく、積分定数も $\beta = 1$ と確定できる。

$$v^r = \dot{r} = \sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} \tag{5.47}$$

両辺を逆数にして積分すると、

$$r\sqrt{1 - \left(\frac{\alpha}{r}\right)^2} = s - s_0$$

この式から逆に r を s の関数として得ることができる。

$$r = \sqrt{\alpha^2 + (s - s_0)^2} \tag{5.48}$$

さらに、この結果を式 5.46 に代入すると、

$$v^\phi = \dot{\phi} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + (s - s_0)^2}$$

両辺を積分すると、次の結果が得られる。

$$\tan(\phi - \phi_0) = \frac{1}{\alpha}(s - s_0) \tag{5.49}$$

式 5.48 と 5.49 より

$$r = \alpha \sec(\phi - \phi_0)$$

となり、任意の直線が測地線であることがわかる。

[例 5.4] [球面幾何学]　例 5.2 より、0 でない接続係数は $\Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cos\theta/\sin\theta$、$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \cos\theta/\sin\theta$、$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta$ の三つである。これから次の測地線方程式が得られる。式 5.44 に上記 Γ^k_{mn} を代入する。

$$\begin{aligned} &\dot{v}^\theta - \sin\theta\,\cos\theta\,(v^\phi)^2 = 0 \\ &\dot{v}^\phi + 2\cot\theta\, v^\theta\, v^\phi = 0 \end{aligned} \tag{5.50}$$

この微分方程式を解けば、測地線が得らえる。まず下の式を $\sin^2\theta$ 倍すると、下記のように書き直すことができる。

$$\frac{d(\sin^2\theta\, v^\phi)}{ds} = 0$$

これから α を定数として、

$$v^\phi = \frac{\alpha}{\sin^2\theta} \tag{5.51}$$

が得られる。

これを前式に代入し、両辺に $2v^\theta$ を掛けることから v^θ を求めることもできるが、前問のように、線素の式を利用して解こう。$ds^2 = a^2 d\theta^2 + a^2\sin^2\theta d\phi^2$ であるので、$1 = a^2(v^\theta)^2 + a^2\sin^2\theta(v^\phi)^2$ が成立する。これに式 5.51 を代入すると、

$$v^\theta = \dot{\theta} = \sqrt{\frac{1}{a^2} - \left(\frac{\alpha}{\sin\theta}\right)^2}$$

両辺を逆数にして積分すると、

$$a\,\cos^{-1}\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{1-a^2\alpha^2}}\right) = s - s_0$$

この式から逆に θ を s の関数として得ることができる。

$$\cos\theta = \sqrt{1-a^2\alpha^2}\,\cos[(s-s_0)/a] \tag{5.52}$$

さらに、この結果を式 5.51 に代入すると、

$$v^\phi = \dot{\phi} = \frac{\alpha}{1-(1-a^2\alpha^2)\,\cos^2[(s-s_0)/a]}$$

両辺を積分すると、次式になる。

$$\phi - \phi_0 = \tan^{-1}\frac{\tan[(s-s_0)/a]}{a\alpha}$$

さらに両辺の tan をとると、次の結果が得られる。

$$\tan(\phi - \phi_0) = \frac{\tan[(s - s_0)/a]}{a\,\alpha} \tag{5.53}$$

式 5.52 と 5.53 から (x, y, z) を求めると、測地線が任意の大円であることが示される。XY 面に置かれた大円 $X = a\cos[(s - s_0)/a]$、$Y = a\sin[(s - s_0)/a]$ を Y 軸を中心に $-\theta_0$ 傾けてみよう。

$$\begin{aligned} x &= a\cos\theta_0\ \cos[(s - s_0)/a] \\ y &= a\sin[(s - s_0)/a] \\ z &= a\sin\theta_0\ \cos[(s - s_0)/a] \end{aligned}$$

これらを球面上の座標系に変換すると、

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{z}{a} = \sin\theta_0\ \cos[(s - s_0)/a] \\ \tan\phi &= \frac{y}{x} = \frac{1}{\cos\theta_0}\ \tan[(s - s_0)/a] \end{aligned}$$

さらに、ϕ 方向に ϕ_0 回転してやると、上式の ϕ を $\phi - \phi_0$ に置き換えればよい。つまり、$a\,\alpha = \cos\theta_0$ とすると、これらの式は、式 5.52 および 5.53 に一致するので、大円であることが証明できた。

第 6 章

曲率

球面上の座標系などを見てみると、局所的には平行移動の概念は成立しても、大局的には成立しない。例えば地球の表面で、大きな面積を囲む軌道に沿ってベクトルを平行移動していくと、一周後には元のベクトルとは異なる方向を向くことは、前章にも示したようである。

つまり、リーマン幾何学では、大局的な平行の概念は存在しない。こうした現象は、ベクトル移動の際の dx^m の一次の微小量まで見ても説明できず、二次の微小量まで調べないと明かにできない。そこで、本章は二次微分の話を行う。

6.1 ベクトル場の二階共変微分商

ベクトル場の二階の共変微分商を計算してみよう。$\nabla_l A^n$ はテンソルであるので、式 5.39 を利用してテンソルの共変微分商を計算し

てみると、次式のようにあまり美しくない式が得られる。

$$\begin{aligned}\nabla_k\left(\nabla_l A^n\right) =& \nabla_k\left(\partial_l A^n + \Gamma^n_{lm} A^m\right)\\ =&\left[\partial_{kl} A^n + \left(\partial_k \Gamma^n_{lm}\right) A^m + \Gamma^n_{lm}\,\partial_k A^m\right]\\ &+ \Gamma^n_{ki}\left(\partial_l A^i + \Gamma^i_{lm} A^m\right) - \Gamma^i_{kl}\left(\partial_i A^n + \Gamma^n_{im} A^m\right)\end{aligned}$$

そこで、この共変微分記号の順番を入れ替えたものを求めよう。

$$\begin{aligned}\nabla_l\left(\nabla_k A^n\right) =&\left[\partial_{lk} A^n + \left(\partial_l \Gamma^l_{km}\right) A^m + \Gamma^n_{km}\,\partial_l A^m\right]\\ &+ \Gamma^n_{li}\left(\partial_k A^i + \Gamma^i_{km} A^m\right) - \Gamma^i_{lk}\left(\partial_i A^n + \Gamma^n_{im} A^m\right)\end{aligned}$$

これらの差をとると多くの項が相殺し、比較的美しい式が得られる。

$$[\nabla_k, \nabla_l]\, A^n = \nabla_k\,\nabla_l\, A^n - \nabla_l\,\nabla_k\, A^n = R^n_{m,kl}\, A^m \tag{6.1}$$

左辺の中括弧は交換子と呼ばれるもので、演算子を入れ替えて差をとることを示す。ただし、$R^n_{m,kl}$ は次式で与えられる量である。$R^n_{m,kl}$ のサフィックスのコンマは省いて記載されることも多いが、k, l が一体となることが多いので本書では入れた。

$$\begin{aligned}R^n_{m,kl} &= \Lambda^n_{m,kl} - \Lambda^n_{m,lk}\\ &= \left(\partial_k \Gamma^n_{lm} + \Gamma^n_{ki}\,\Gamma^i_{lm}\right) - \left(\partial_l \Gamma^n_{km} + \Gamma^n_{li}\,\Gamma^i_{km}\right)\end{aligned} \tag{6.2}$$

ここで、

$$\Lambda^n_{m,kl} = \partial_k \Gamma^n_{lm} + \Gamma^n_{ki}\,\Gamma^i_{lm} \tag{6.3}$$

であるが、$\Lambda^n_{m,kl}$ は特に本書でのみ導入した非テンソル量である。

$R^n_{m,kl}$ は**リーマン・クリストッフェル曲率テンソル** (Riemann-Christoffel curvature tensor)、略して**曲率テンソル** (curvature tensor) と呼ばれる。何故テンソルであるかというと、式 6.1 の左辺の反変ベクトルの共変微分はテンソル、その共変微分もテンソル、それらの差

もテンソルであり、さらに右辺で、テンソルの商法則より $R^n_{m,kl}$ はテンソルであるからである。共変微分記号の交換子は後に述べるように、微小ループに沿うベクトルの平行移動と深い関係にある。そこで、曲率テンソルの定義はこの程度にして、話を先に進めよう。

[例 6.1] [二次元極座標系]　二次元極座標系の接続係数を再掲しておこう。次の 3 項目を除いて残りは 0 である。

$$\begin{aligned}\Gamma^r_{\phi\phi} &= -r \\ \Gamma^\phi_{r\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi r} = 1/r\end{aligned} \tag{6.4}$$

曲率テンソル $R^m_{n,kl}$ は、m と n が異なり、k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned}R^r_{\phi,r\phi} &= -R^r_{\phi,\phi r} = (\partial_r\Gamma^r_{\phi\phi} + \Gamma^r_{ri}\,\Gamma^i_{\phi\phi}) - (\partial_\phi\Gamma^r_{\phi r} + \Gamma^r_{\phi i}\,\Gamma^i_{r\phi}) = 0 \\ R^\phi_{r,r\phi} &= -R^\phi_{r,\phi r} = (\partial_r\Gamma^\phi_{r\phi} + \Gamma^\phi_{ri}\,\Gamma^i_{\phi r}) - (\partial_\phi\Gamma^\phi_{rr} + \Gamma^\phi_{\phi i}\,\Gamma^i_{rr}) = 0\end{aligned} \tag{6.5}$$

[例 6.2] [球面幾何学]　球面上の座標系でも接続係数は次の 3 項目を除いて 0 である。

$$\begin{aligned}\Gamma^\theta_{\phi\phi} &= -\sin\theta\cos\theta \\ \Gamma^\phi_{\theta\phi} &= \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta\end{aligned} \tag{6.6}$$

曲率テンソル $R^n_{m,kl}$ は、m と n が異なり、k と l が異なる場合しか存在しない。

$$\begin{aligned}R^\theta_{\phi,\theta\phi} &= -R^\phi_{\theta,\theta\phi} = (\partial_\theta\Gamma^\theta_{\phi\phi} + \Gamma^\theta_{\theta i}\,\Gamma^i_{\phi\phi}) - (\partial_\phi\Gamma^\theta_{\phi\theta} + \Gamma^\theta_{\phi i}\,\Gamma^i_{\theta\phi}) = \sin^2\theta \\ R^\phi_{\theta,\phi\theta} &= -R^\theta_{\phi,\theta\phi} = (\partial_\theta\Gamma^\phi_{\theta\phi} + \Gamma^\phi_{\phi i}\,\Gamma^i_{\theta\theta}) - (\partial_\phi\Gamma^\phi_{\theta\theta} + \Gamma^\phi_{\theta i}\,\Gamma^i_{\phi\theta}) = 1\end{aligned} \tag{6.7}$$

6.2 基底のループに沿う移動

本章の最初に述べたように、基底を任意のループに沿って平行移動すると、その結果は元の基底とは異なる。ループとして二つの微小ベクトルで定義される小さな四辺形を選ぶと、一周した結果は元のベクトルと微小ベクトルの長さの二次の効果分ずれてくる。このため、すべての微小量を二次の項まで求めておこう。まず、移動の際には接続係数が現われるが、接続係数自身が移動の際の一次変化に関する微係数的なものなので、さらにその一次までの近似を求めておこう。$\boldsymbol{x}$ 点の近傍の点を $\boldsymbol{x} + d\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + dx^k\,\boldsymbol{e}_k$ としよう。

$$\Gamma^n_{ml}(\boldsymbol{x} + dx^k\,\boldsymbol{e}_k) = \Gamma^n_{ml}(\boldsymbol{x}) + dx^k\,\partial_k\Gamma^n_{ml}(\boldsymbol{x}) \tag{6.8}$$

これを利用して、僅かに離れた点の自然基底が二次近似でどのように表現されるか求めよう。まず接続係数を用いて、一次の微小量が得られる (式 5.9 の再掲)。

$$\delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) = dx^k\,\Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \tag{6.9}$$

したがって二次の微小量は次のようになる。計算にあたり、三次以上の項は無視している。

$$\begin{aligned}
\delta^2\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) &= \delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x} + dx^k\,\boldsymbol{x}_k) - \delta\boldsymbol{e}_m(\boldsymbol{x}) \\
&= dx^l\,\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x} + dx^{k'}\,\boldsymbol{e}_{k'})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x} + dx^k\,\boldsymbol{e}_k) - dx^l\,\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \\
&= dx^l\,\left[\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x}) + dx^{k'}\,\partial_{k'}\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x})\right]\left[\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) + dx^k\,\Gamma^{n'}_{kn}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_{n'}(\boldsymbol{x})\right] \\
&\qquad - dx^l\,\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \\
&= dx^k\,dx^l\,\partial_k\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) + dx^k\,dx^l\,\Gamma^{n'}_{kn}(\boldsymbol{x})\,\Gamma^n_{lm}(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_{n'}(\boldsymbol{x}) \\
&= dx^k\,dx^l\,\Lambda^n_{m,kl}\,\boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x})
\end{aligned} \tag{6.10}$$

ここで、式 6.3 で示した $\Lambda^n_{m,kl}$ を利用している。 これよりテーラー展開を利用して、次式が得られる。

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{e}_{||m}(\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x} + dx^k\, \boldsymbol{e}_k) \\ &\quad = \left[\delta^n_m + dx^k\, \Gamma^n_{km}(\boldsymbol{x}) + dx^k\, dx^l\, \Lambda^n_{m,kl}/2\right] \boldsymbol{e}_n(\boldsymbol{x}) \quad (6.11) \end{aligned}$$

次に、小さなほぼ平行四辺形 $OPQR$ を考え、自然基底 $\boldsymbol{e}_m$ を $O \to P \to Q$ と平行移動したものと、$O \to R \to Q$ と平行移動したものと差を見てみよう。先に結論を言ってしまうと、この二つには、平行四辺形の面積に比例した差が発生するのである。$\boldsymbol{e}_m$ を $O \to P \to Q$ の順に平行移動した基底を $\boldsymbol{e}_{||m}(O, P)$、$\boldsymbol{e}_{||m}(O, P, Q)$、$O \to R \to Q$ 平行移動した基底を $\boldsymbol{e}_{||m}(O, R)$、$\boldsymbol{e}_{||m}(O, R, Q)$ と記載する。本当はすべての位置記号の間には $(O \to P)$ などのように、$\to$ を入れるべきであるが、式を縮めて記載するためにコンマとした。

平行四辺形の O 点の座標を $\boldsymbol{x}$、P 点を $\boldsymbol{x}_P = \boldsymbol{x} + da^l\, \boldsymbol{e}_l(O)$、$Q$ 点が $\boldsymbol{x}_Q = \boldsymbol{x}_P + db^k\, \boldsymbol{e}_k(P)$、$R$ 点が $\boldsymbol{x}_R = \boldsymbol{x} + da^k\, \boldsymbol{e}_k(O)$、$Q$ 点が $\boldsymbol{x}_Q = \boldsymbol{x}_R + db^l\, \boldsymbol{e}_l(R)$ にあるとしよう。Q 点の定義が二種類あるが、これらはほとんど同じ値になる。また、$\Lambda^n_{m,kl}$ などは、厳密には場所の関数であるが、その依存性は 4 次の微小量なので、空間依存性は無視する。

まず、$\boldsymbol{e}_{||m}(O, P)$ は

$$\boldsymbol{e}_{||m}(O, P) = \left[\delta^n_m + da^k\, \Gamma^n_{km}(O) + da^k\, da^l\, \Lambda^n_{m,kl}/2\right] \boldsymbol{e}_n(O) \quad (6.12)$$

$\boldsymbol{e}_{||m}(O,P,Q)$ はこの結果を利用して、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{||m}(O,P,Q) &= \left[\delta^i_m + db^k\,\Gamma^i_{km}(P) + db^k\,db^l\,\Lambda^i_{m,kl}/2\right]\boldsymbol{e}_{||i}(O,P)\\
&= \left[\delta^i_m + db^k\,\Gamma^i_{km}(O) + db^k\,da^l\,\partial_l\Gamma^i_{km}(O) + db^k\,db^l\,\Lambda^i_{m,kl}/2\right]\\
&\quad \left[\delta^n_i + da^{k'}\,\Gamma^n_{k'i}(O) + da^{k'}\,da^{l'}\,\Lambda^n_{i,k'l'}/2\right]\,\boldsymbol{e}_n(O)\\
&= \left[\delta^n_m + db^k\,\Gamma^n_{km}(O) + da^l\,\Gamma^n_{lm}(O)\right.\\
&\quad \left.+ db^k\,db^l\,\Lambda^n_{m,kl}/2 + db^k\,da^l\,\Lambda^n_{m,lk} + da^k\,da^l\,\Lambda^n_{m,kl}/2\right]\,\boldsymbol{e}_n(O)
\end{aligned}$$

ここで式 6.3 を利用している。

同様に $\boldsymbol{e}_{||m}(O,R,Q)$ は、上式の da と db を入れ替えればよいから、

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{||m}(O,R,Q) &= \left[\delta^n_m + da^k\,\Gamma^n_{km}(O) + db^l\,\Gamma^n_{lm}(O)\right.\\
&\quad \left.+ da^k\,da^l\,\Lambda^n_{m,kl}/2 + da^k\,db^l\,\Lambda^n_{m,lk} + db^k\,db^l\,\Lambda^n_{m,kl}/2\right]\,\boldsymbol{e}_n(O)
\end{aligned}$$

最後に、この二つの経路の差は

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{e}_{||m}(O,P,Q) - \boldsymbol{e}_{||m}(O,R,Q) =& da^k\,db^l\,(\Lambda^n_{m,kl} - \Lambda^n_{m,lk}\,\boldsymbol{e}_n(O)\\
=& da^k\,db^l\,R^n_{m,kl}\,\boldsymbol{e}_n(O)
\end{aligned}$$

経路差の計算結果は、このループを $O \to P \to Q \to R \to O$ と一周回ったときの差とも一致する。これを単に (O,O) と書こう。

$$\boldsymbol{e}_{||m}(O,O) = da^k\,db^l\,R^n_{m,kl}\,\boldsymbol{e}_n(O) \tag{6.13}$$

双対基底についても、同様な計算を行うことで、ループに沿う平行移動の結果を計算することができる。

$$\boldsymbol{e}^m_{||}(O,O) = da^k\,db^l\,R^m_{n,kl}\,\boldsymbol{e}^n(O) \tag{6.14}$$

6.3 ベクトルのループに沿う移動

一般のベクトル $\boldsymbol{A}$ に対し、$\boldsymbol{A} = A_{||}^m(O,O)\,\boldsymbol{e}_{||m}(O,O) = A^m(O)\,\boldsymbol{e}_m(O)$ なので、

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= A_{||}^m(O,O)\,\boldsymbol{e}_{||m}(O,O)\\
&= A_{||}^m(O,O)\,(\boldsymbol{e}_m(O) - da^k\,db^l\,R^n_{m,kl}\,\boldsymbol{e}_n(O))\\
&= A_{||}^m(O,O)\,\boldsymbol{e}_m(O) - da^k\,db^l\,R^n_{m,kl}\,A_{||}^m(O,O)\,\boldsymbol{e}_n(O)\\
(\ &= A^m(O)\,\boldsymbol{e}_m(O)\,)
\end{aligned}
$$

これより、括弧内の等号の両辺に共役の単位ベクトルを掛けると次式が得られる。

$$
A_{||}^m(O,O) = A^m(O) + da^k\,db^l\,R^m_{n,kl}\,A^n(O) \tag{6.15}
$$

ただし、$A_{||}^n(O,O)$ を四次の微小量を無視して $A^n(O)$ に置き換えている。つまり、上付きサフィックスを有する反変ベクトルと双対基底は共に正の補正を受ける。

同様な手法により、

$$
A_{||m}(O,O) = A_m(O) - da^k\,db^l\,R^n_{m,kl}\,A_n(O) \tag{6.16}
$$

が得られる。つまり、下付きサフィックスを有する共変ベクトルと自然基底は共に負の補正を受ける。

ここで、ループに沿った微小移動が二階の共変微分商の交換子に繋

がることを示そう。式 6.15 の左辺は次のように変形できる。

$$\begin{aligned}
&A^m_{||}(O,O) - A^m(O) \\
&\quad = [A^m_{||}(O,O) - A^m_{||}(O,R)] + [A^m_{||}(O,R) - A^m_{||}(O,Q)] \\
&\qquad + [A^m_{||}(O,Q) - A^m_{||}(O,P)] + [A^m_{||}(O,P) - A^m(O)] \\
&\quad = \delta A^m(O,R) + \delta A^m(R,Q) + \delta A^m(Q,P) + \delta A^m(P,O) \\
&\quad = -\nabla_l\, A^m(R)\, db^l - \nabla_k\, A^m(Q)\, da^k \\
&\qquad + \nabla_l\, A^m(P)\, db^l + \nabla_k\, A^m(O)\, da^k \\
&\quad = \nabla_k\, \nabla_l\, A^m\, da^k\, db^l - \nabla_l\, \nabla_k\, A^m\, da^k\, db^l \\
&\quad = [\nabla_k, \nabla_l]\, A^m\, da^k\, db^l
\end{aligned}$$

したがって、式 6.1 と同じ式が得られる。

$$[\nabla_k, \nabla_l]\, A^m = R^m_{n,kl}\, A^n \tag{6.17}$$

したがって、小さなループにおける平行移動が、二階共変微分商の交換子と対応がとれていることが納得できよう。

同様に、共変成分の二階共変微分商の交換子についても次式が得られる。

$$[\nabla_k, \nabla_l]\, A_m = -R^n_{m,kl}\, A_n \tag{6.18}$$

これらのように、偏微分商は交換可能であるのに対し、共変微分商は一般に交換不能である。

証明は省略するが、任意のテンソルに対する二階共変微分商の交換子についても、上付きサフィックスには正号が、下付きサフィックスについては負号がついた曲率テンソルが対応する。例えば、

$$[\nabla_k, \nabla_l]\, A^n_m = R^n_{i,kl}\, A^i_m - R^i_{m,kl}\, A^n_i$$

これを**リッチの公式** (Ricci formula) と呼ぶ。

6.4 曲率テンソルの対称性

曲率を降階して得られる

$$R_{mn,kl} = g_{mi}\, R^i_{n,kl} \tag{6.19}$$

も曲率テンソルと呼ばれる。

曲率にはいくつかの対称性がある。

1. 後半のサフィックスの入替に関する**反対称性** (anti-symmetricity)。

$$\begin{aligned} R^m_{n,kl} &= -\, R^m_{n,lk} \\ R_{mn,kl} &= -\, R_{mn,lk} \qquad (\text{上式を降階したもの}) \end{aligned} \tag{6.20}$$

2. 前半のサフィックスの入替に関する**反対称性** (anti-symmetricity)。

$$R_{mn,kl} = -R_{nm,kl} \tag{6.21}$$

3. 前半と後半のサフィックスの入替に関する**交換対称性** (commutation)。

$$R_{mn,kl} = R_{kl,mn} \tag{6.22}$$

これらの証明は囲みに示す。

式 **6.20** の証明**:** 曲率テンソルの定義式 6.2 が交換子で定義されているため、その一般的性質である。

式 **6.21** の証明**:** リッチの公式を使って、計量テンソルの二階微分の交換子を計算してみよう。

$$\begin{aligned} [\nabla_k, \nabla_l]\, g_{mn} &= -\, R^i_{m,kl}\, g_{in} - R^i_{n,kl}\, g_{mi} \\ &= -\, R_{nm,kl} - R_{mn,kl} \end{aligned}$$

計量テンソルの共変微分は 0 であるから、左辺は 0 なので、証明終り。

式 **6.22** の証明: 曲率テンソルの定義式 6.2 の n,k,l を循環入替した三つの式を加え合せると、接続係数の対称性を使って第一**ビアンキ恒等式** (Biannki equation) と呼ばれる次式が得られる。

$$R^n_{m,kl} + R^n_{k,lm} + R^n_{l,mk} = 0 \tag{6.23}$$

さらにこれを降階すると、

$$R_{nm,kl} + R_{nk,lm} + R_{nl,mk} = 0$$

式 6.22 は、これに式 6.20 と式 6.21 を適用して得られる等価な式である。上式のすべての項で n と m を入れ替える。

$$R_{mn,kl} + R_{mk,ln} + R_{ml,nk} = 0$$

これら二式を加えると、前半サフィックスの反対称性より第一項が消滅する。

$$R_{nk,lm} + R_{nl,mk} + R_{mk,ln} + R_{ml,nk} = 0$$

すべての項の前半サフィックス入替を行うと、

$$-R_{kn,lm} - R_{ln,mk} - R_{km,ln} - R_{lm,nk} = 0$$

この両側を循環する式で置き換えると、

$$R_{kl,mn} + R_{km,nl} - R_{ln,mk} - R_{km,ln} + R_{ln,km} + R_{lk,mn} = 0$$

第 4 項および第 5 項の後半サフィックス入替を行い、第一項と最終項を前半サフィックス反対称性を利用して消去し、全体を 2 で割ると、

$$R_{km,ln} - R_{ln,mk} = 0$$

が得られ、証明が終了する。

6.5 リッチテンソル、スカラー曲率とアインシュタインテンソル

以上で、いわゆるリーマン幾何学の説明は終りであるが、最後に一般相対性理論でしばしば用いられるいくつかの概念を導入しよう。

まず、曲率テンソルを次のように縮約したテンソルを**リッチテンソル** (Ricci tensor) と呼ぶ。

$$R_{ml} = R^{k}_{m,kl} \tag{6.24}$$

さらに、これを縮約したものを**スカラー曲率** (scalar curvature) と呼ぶ。

$$R = g^{ml}\, R_{ml} = g^{ml}\, R^{k}_{m,kl} \tag{6.25}$$

続いて**アインシュタインテンソル** (Einstein tensor)G^{ik} を導入しよう。これは次式によって定義される。

$$G^{ij} = R^{ij} - \frac{1}{2}\, g^{ij}\, R \tag{6.26}$$

式からわかるように、昇階されたリッチテンソルから計量テンソルの比例項を引いただけなので、一種の曲率テンソルである。しかし、曲率テンソルと異なりアインシュタインテンソルの共変微分は 0 となる。

$$\nabla_i\, G^{ij} = 0 \tag{6.27}$$

この性質を利用して、一般相対性理論に利用される。これらの式の導出に興味のある人は、囲みを見てほしい。

まず、曲率テンソルの微分商に対し、次式で表わされる第二ビアンキ恒等式、あるいは単に**ビアンキ恒等式** (Biannki equation) と呼ばれる対称性が成立する。

$$\nabla_i R^n_{m,kl} + \nabla_k R^n_{m,li} + \nabla_l R^n_{m,ik} = 0 \tag{6.28}$$

あるいは、同じ式であるが、次式の表現の方が見易いかも知れない。

$$R^n_{m,kl;i} + R^n_{m,li;k} + R^n_{m,ik;l} = 0 \tag{6.29}$$

この式の証明は以下のようである。

$\big[\nabla_i, [\nabla_k, \nabla_l]\big] A_m$ を計算してみよう。まず、交換子を曲率テンソルに変換せず、そのまま共変微分の形のままで計算してみよう。

$$\begin{aligned}\big[\nabla_i, [\nabla_k, \nabla_l]\big] A_m &= \nabla_i [\nabla_k, \nabla_l] A_m - [\nabla_k, \nabla_l] \nabla_i A_m \\ &= \nabla_i \nabla_k \nabla_l A_m - \nabla_i \nabla_l \nabla_k A_m - \nabla_k \nabla_l \nabla_i A_m + \nabla_l \nabla_k \nabla_i A_m\end{aligned}$$

ここで、i, k, l を循環して三つの式を加えると、右辺は 0 となる。

次に $\big[\nabla_i, [\nabla_k, \nabla_l]\big] A_m$ を、交換子を曲率テンソルに直して変形する。

$$\begin{aligned}\big[\nabla_i, [\nabla_k, \nabla_l]\big] A_m &= \nabla_i [\nabla_k, \nabla_l] A_m - [\nabla_k, \nabla_l] \nabla_i A_m \\ &= -\nabla_i (R^n_{m,kl} A_n) - R^n_{m,kl} \nabla_i A_n - R^n_{i,kl} \nabla_n A_m \\ &= -(\nabla_i R^n_{m,kl}) A_n - R^n_{i,kl} \nabla_n A_m\end{aligned}$$

ここで、最初の等号の後の第二項の変形は、$\nabla_i A_m$ を二階のテンソルとして、リッチの公式を適用する。この式の i, k, l を循環して三つの式を加えた結果は、前半で示したように 0 となるから、次式が得られる。

$$\begin{aligned}(\nabla_i R^n_{m,kl} + \nabla_k R^n_{m,li} + \nabla_l R^n_{m,ik}) A_n \\ + (R^n_{i,kl} + R^n_{k,li} + R^n_{l,ik}) \nabla_n A_m = 0\end{aligned}$$

第二項は式 6.23 を利用して 0 となるから、ベクトル A_n の任意性を利用して、証明が完了する。

続いてアインシュタインテンソルを導出しよう。ビアンキ恒等式に g^l_n を掛ける。計量テンソルの共変微分は 0 であるので、これを共変微分の内部に入れても構わない。

$$\nabla_i(g_n^l\, R_{m,kl}^n) + \nabla_k(g_n^l\, R_{m,li}^n) + \nabla_l(g_n^l\, R_{m,ik}^n) = 0$$

このうち、第一項と二項は縮約になっていて、リッチテンソルに置き換る。また第三項は単純なサフィックスの置き換えになる。

$$-\nabla_i R_{mk} + \nabla_k R_{mi} + \nabla_l R_{m,ik}^l = 0$$

さらに $g^{mk} g^{ij}$ を掛けて昇階してみよう。

$$-\nabla_i g^{ij} R + \nabla_k R^{kj} + \nabla_l R^{lj} = 0$$

第三項の変形だけはちょっと面倒なので、詳細を示す。

$$g^{mk} g^{ij}\, \nabla_l R^l m, ik = g^{mk} g^{ij}\, \nabla_l(g^{lh} R_{hm,ik}) = g^{ij}\, \nabla_l(g^{lh} g^{mk} R_{hm,ik})$$
$$= -g^{ij}\, \nabla_l(g^{lh} R_{h,ik}^k) = g^{ij}\, \nabla_l(g^{lh} R_{hi}) = g^{ij}\, \nabla_l R_i^l = \nabla_l R^{lj}$$

第一項にはスカラー曲率が現われる。第二項は $k \to i$、第三項は $l \to i$ と置き換え、すべてを ∇_i に統一すると、次の関係式が得られ、証明が終了する。

$$\nabla_i \left(R^{ij} - \frac{1}{2} g^{ij} R \right) = \nabla_i\, G^{ij} = 0$$

[例 6.3] [二次元極座標系]　曲率テンソル $R_{n,kl}^m$ は、例 6.1 よりすべて 0 である。このため、リッチテンソルもすべて 0、スカラー曲率も 0 となる。つまり、実は曲っていない空間であることがわかる。

[例 6.4] [球面幾何学]　例 6.2 の結果、曲率テンソルは次の 3 項目を除いて 0 である。

$$\begin{aligned} R_{\phi,\theta\phi}^\theta &= -R_{\theta,\theta\phi}^\phi = \sin^2\theta \\ R_{\theta,\phi\theta}^\phi &= -R_{\phi,\theta\phi}^\theta = 1 \end{aligned} \tag{6.30}$$

したがって、リッチテンソルは

$$
\begin{aligned}
R_{\theta\theta} &= R^{\theta}_{\theta,\theta\theta} + R^{\phi}_{\theta,\phi\theta} = 1 \\
R_{\theta\phi} &= R_{\phi\theta} = 0 \\
R_{\phi\phi} &= R^{\theta}_{\phi,\theta\phi} + R^{\phi}_{\phi,\phi\phi} = \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

より、

$$(\{R_{mn}\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.31}$$

これを例 3.5 に示した計量テンソル

$$(\{g^{mn}\}) = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.32}$$

を使って昇階すると、

$$(\{R^m_n\}) = (\{g^{mi}\}\{R_{in}\}) = \frac{1}{a^2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{6.33}$$

さらに昇階すると、

$$(\{R^{mn}\}) = \frac{1}{a^4}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/\sin^2\theta \end{pmatrix} \tag{6.34}$$

スカラー曲率は

$$R = R^{\theta}_{\theta} + R^{\phi}_{\phi} = 2/a^2 \tag{6.35}$$

つまり、実際に曲っている空間であることがわかる。

アインシュタインテンソルは、

$$(\{G^{mn}\}) = (\{R^{mn}\}) - \frac{R}{2}(\{g^{mn}\}) = 0 \tag{6.36}$$

第 7 章

一般相対性理論

リーマン幾何学と言えば、最大の応用分野は一般相対性理論である。本章では、一般相対性理論に限って、リーマン幾何学について述べよう。

7.1 等価原理

一般相対性理論とは重力を扱う理論である。特殊相対性理論で、電磁気を中心とした力を扱っているのに、重力を扱わなかったのは、アインシュタインの心の中に、当初から重力は一般の力とは別であるという意識があったのだと思われる。その主たる原因は、重力質量 m_{G} と慣性質量 m_{I} の一致である。何故どんな質量の物体でも、同じ軌跡で落下するのであろうかという疑問に対し、アインシュタインは、空間の構造に起因するから、こうなると考えたのである。空間と言っても時間軸を含めた四次元空間である。

本稿をお読みの方はどなたも重力が $F = mg$ で与えられ、ニュートンの第二法則が $F = ma$ で与えられていることをご存知であろう。

しかし、この二つの m が何故共通の値なのかを疑った人は意外に少いのではないだろうか。私も疑わなかった者の一人である。生活体験から、重いものや軽いものがあることは分っていたので $F = mg$ は簡単に理解できる。一方、私はガリレーの落下実験や惑星の運動などから、何故、これらは質量に依らず同じような軌跡を描くのだろうという疑問を感じたことはあった。そして、$F = ma$ の式を見て、なるほど、だから物体は質量に依らない運動をするのだと納得してしまったのである。もちろん、その瞬間は何故同じ m を使うのだろうという疑義は頭をよぎったのであるが、かなり早いうちにその疑問は維持されることなく消え去ったという気がする。ここにこだわり続けたアインシュタインは正に凄いとしか評価できない。

より具体的には、重力のある空間で、自由落下しているエレベーターを考えると、その中では重力は感じられない。つまり、エレベータ内は**慣性系** (inertial system) になっている。このエレベーター内にいる人間は、自分が加速系にいて重力落下をしているのか、慣性系にいるのかを区別する方法はない。また、エレベーター内で等速度運動をしているどんな質量の物体も、外から見ると、すべて同じ加速度で落下しているように見える。つまり、重力とはこれら二つの系の座標変換の結果、現われてくる量であると考えたのである。エレベータの思考実験の結果、エレベータ内では光も直線運動するはずである。ということは、重力のある系で観測すると、光も質量のある物質と同じように、放物線を描くことになる。光の落下が簡単には観測できないのは、光が余りにも高速すぎて、落下量よりも水平移動距離の方が著しく大きいからであろう。

さて、質量があろうとなかろうと重力の影響を受けるとすると、これは球面幾何学のように空間が歪んでいると理解する方が自然である。つまり物体も光線もこの曲った空間の測地線に沿って移動してい

るだけではないだろうか。こうした大胆な仮説に基づいて、重力と空間歪の関係を求め、さらには重力の源泉である質量 (特殊相対性理論の結論から、質量というよりはエネルギーと呼ぶ方がよい) と空間歪との関係を導出したものが、一般相対性理論である。このように、適切な座標系を選ぶことで、特殊相対性理論が働く**慣性系** (inertial system) が得られることを、**等価原理** (equivalence principle) と呼ぶ。

等価原理とは、重力場のなかで、すべての物体が、質量に依存せず、同じ重力加速度で運動することであるとも言える。そこで、等価原理の証明には $m_{\mathrm{G}}/m_{\mathrm{I}}$ が一定であることを実証すればよい。古くはガリレオのピサの斜塔での自由落下実験があるが、より正確には振子の錘の質量を変える、あるいは捻れの平衡などの方法がある。捻れの平衡について、若干説明しよう。地上の質点には重力以外に遠心力のような加速力が働く。前者は m_{I} に、後者は m_{G} に比例する。二つの異なる質点を用意し、この二つを棒で繋いで、適切な位置に支点をとり、下向きに働く重力に対して平衡をとる。これらの質点には地軸と垂直に加速力も働いているので、もし、重力質量と慣性質量に差があると、加速力の方では平衡がとれないことになり、この天秤は回転を初める。この回転のトルクを調べることにより、二つの質点の $m_{\mathrm{G}}/m_{\mathrm{I}}$ に差があるかを調べることができる。この実験の結果、現在 11 桁の確度で、質量比は一定と言える。つまり、等価原理は成立している可能性が高いのである。

7.2 測地線と重力場中の質点の運動

等価原理から考えると、重力場の影響下における物体の運動は、慣性系と異なる計量テンソルを持つ空間の測地線で表されそうである。測地線の式 5.44 を再掲しておこう。なお、$\dot{x}^m = dx^m/ds$ など

である。

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{mn}\,\dot{x}^m\,\dot{x}^n = 0 \tag{7.1}$$

物体の運動の軌道に沿っては、$ds^2 < 0$ となるため、s の代わりに、$c^2 d\tau^2 = -ds^2$ の関係にある τ を使っている。

測地線の方程式も、重力下におけるニュートンの方程式と同じく二階の微分方程式であり、同じ数の自由度を持っている。問題を簡単にするために、光速に比べ十分低速の粒子を対象にしよう。この仮定により $d\tau \fallingdotseq dt$ とできる。また、$\dot{x} = dx/d\tau$ などは $c\dot{t} = cdt/d\tau \fallingdotseq c$ に比べ、圧倒的に小さいと言える。すると、上式 7.1 の Γ^k_{mn} の効果は Γ^k_{00} のみしか効いてこないことがわかる。

$$\ddot{x}^k + \Gamma^k_{00}\,c\dot{t}\,c\dot{t} = 0 \tag{7.2}$$

さて、重力が x^1 方向にしかかからないとして、この式がニュートンの式と近似的に一致するにはどうしたらよいだろうか。ニュートンの式は、重力ポテンシャルを $\phi(x^1)$ とするとき、$d^2x^1/dt^2 = -\partial_1\phi$ である。幸いにして、低速における $c\dot{t}$ はほぼ c であるので Γ^k_{00} の項は $k=1$ に対してだけ存在すればよい。さらに、$\ddot{x}^1 \fallingdotseq d^2x^1/dt^2 = -\partial_1\phi$ で、これと $\Gamma^1_{00}c^2$ の和が 0 であることより、$\Gamma^1_{00} = (1/c^2)\,\partial_1\phi$ が得られる。この他の空間座標方向には加速はないため、$k = 2, 3$ に対して $\Gamma^k_{mn} = 0$ となる。

次に計量テンソルを推定してみよう。g_{mn} は慣性系の値とほとんど等しく、僅かなずれしかないものとしよう。すると、計量テンソルから接続係数を求める式 5.22 より、$\partial_0 g_{01}$、$\partial_0 g_{10}$、$\partial_1 g_{00}$ の三項しか値を持ちえない。g_{mn} は x 軸方向にしか変動していないだろうから、

g_{00} だけが存在することになる。つまり、次式が得られる。

$$\Gamma^1_{00} = -\frac{1}{2}\, g^{11}\, \partial_1 g_{00} \quad \left(= \frac{1}{c^2}\partial_1 \phi \right) \tag{7.3}$$

g^{11} がほぼ 1 であるので、$g_{00} = -(2/c^2)\,\phi(x) + \mathrm{const}$ が得られる。重力中心より十分遠方では、重力のないときの $g_{00} = -1$ に漸近しなければないので、次の結果が得られる。

$$g_{00} = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) \tag{7.4}$$

これ以外の g_{mn} は δ_{mn} に等しいので、線素は次式のようになる。

$$ds^2 = -c^2 d\tau^2 = -\left(1 + \frac{2\phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{7.5}$$

改めて、これらの g_{mn} からスタートして測地線の方程式を解いておく価値があろう。特に $\phi = -gx^1$（x^1 の原点は、観測している付近とする）の場合を扱ってみよう。Γ^k_{mn} は $\Gamma^1_{00} = -g/c^2$、$\Gamma^0_{01} = \Gamma^0_{10} = -g/[c^2(1 - 2gx^1/c^2)]$ を除いてすべて 0 となる。そこで、$k = 0, 1$ に対する測地線方程式は、$v^k = \dot{x}^k$ として、次式のようになる。

$$\frac{dv^0}{d\tau} - \frac{2g}{c^2}\,\frac{1}{1 - 2gx^1/c^2}\, v^0\, v^1 = 0 \tag{7.6}$$

$$\frac{dv^1}{d\tau} - \frac{g}{c^2}\,(v^0)^2 = 0 \tag{7.7}$$

式 7.6 の両辺を v^0 で割って、τ で積分すると、

$$\frac{d(\log v^0)}{d\tau} + \frac{d \log(1 - 2gx^1/c^2)}{d\tau} = 0 \tag{7.8}$$

$$v^0(1 - 2gx^1/c^2) = v^0(0) \tag{7.9}$$

積分定数 $v^0(0)$ は $x^1 = 0$ における v^0 である。

これから得られた v^0 を式 7.7 へ代入すると、x^1 だけの微分方程式が得られるが、容易には解けない。そこで、今迄の例で度々行ったように、線素の式を利用しよう。

$$-c^2 = -(1 - 2gx^1/c^2)(v^0)^2 + (v^1)^2 + (v^2)^2 + (v^3)^2$$

$v^2 = v^2(0)$、$v^3 = v^3(0)$ なので、

$$v^1 = \sqrt{\frac{(v^0(0))^2}{1 - 2gx^1/c^2} - c^2 - (v^2(0))^2 - (v^3(0))^2}$$

残念ながら、この微分方程式は解けない。$2gx^1/c^2$ が 1 に比べ十分小さい場合には $1/(1 - 2gx^1/c^2) \doteqdot 1 + 2gx^1/c^2$ とすることで、解くことが可能である。

$$\tau - \tau_0 = \frac{\sqrt{(v^0(0))^2(1 + 2gx^1/c^2) - c^2 - (v^2(0))^2 - (v^3(0))^2}}{(v^0(0))^2 g/c^2}$$

これを x^1 について解くと、

$$\begin{aligned} x^1 = &\frac{g}{2}\left(\frac{v^0(0)}{c}\right)^2 (\tau - \tau_0)^2 \\ &+ \frac{1}{2g}\left(\frac{c}{v^0(0)}\right)^2 \left[c^2 + (v^2(0))^2 + (v^3(0))^2 - (v^0(0))^2\right] \end{aligned}$$

これより、質点の運動方程式が得られる。

$$x^1 = \frac{g}{2}\left(\frac{v^0(0)}{c}\right)^2 (\tau - \tau_0)^2 + x^1(0) \tag{7.10}$$

$v^0(0) \doteqdot c$ であるので、ほぼ、一定重力場の落下の式と一致する。

以上の議論から、質点の運動は重力場の影響を計量テンソルに反映させた歪んだ空間の測地線で表されることがわかった。また、g_{mn} がほぼ慣性系における計量に等しい場合には、g_{00} の位置依存性だけが

重要であり、他の計量の位置依存性にはあまり関係せず、同じ結論が得られる。実際、後述のシュバルツシルト計量を見ると、g_{11} は次のようであることが誘導される。

$$g_{11} = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)^{-1} \tag{7.11}$$

7.3 アインシュタイン方程式

前節に述べた議論を一般化することで、**一般相対性理論 (general theory of relativity)** を導出することができる。ニュートンの重力方程式をポアソン方程式で表すと、次式のようになる。

$$\nabla^2 \phi(\boldsymbol{x}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{x}) \tag{7.12}$$

ところで、$\phi(\boldsymbol{x})$ は式 7.4 より、計量テンソルに対応することから、この式の左辺は恐らく計量テンソルの二次微分になるであろう。また、右辺は質量密度、つまり特殊相対性理論の式 4.57 に示したエネルギー運動量テンソル T^{mn} になることが予想できる。ただし、式 4.55 に示したエネルギー運動量の保存則は、空間微分が共変微分に変って、次のようになる。

$$\nabla_n T^{mn} = 0 \tag{7.13}$$

以下の式変形に都合のよいように、T^{mn} の対称性より ∇_m の替りに ∇_n としている。

右辺は**全エネルギー運動量応力テンソル (total energy-momentum-stress tensor)** そのものでよいが、左辺の候補としては、今迄議論した各章から計量テンソルの二次微分までを含むテンソルということになる。第 5 章の共変微分で現われた接続係数はテンソルではない。第 6

章の曲率に示したいくつかの量には、計量テンソルの二次微分が含まれている。曲率テンソルおよびそれを縮約したリッチテンソルやスカラー曲率である。さらに、計量テンソル自身も 0 次微分のテンソルである。右辺が 2 階のテンソルであるので、4 階の曲率テンソルは候補とならない。リッチテンソル R^{mn} は有力な候補である。またスカラー曲率に計量テンソルを掛けた $g^{mn}R$ も候補となる。さらに計量テンソル g^{mn} そのものも候補である。

このため、左辺をこれらの線形結合としてみよう。

$$c_1 R^{mn} + c_2 g^{mn} R + c_3 g^{mn} = c_4 T^{mn}$$

右辺の共変微分が 0 であることから左辺の共変微分も 0 のはずである。

$$c_1 \nabla_m R^{mn} + c_2 \nabla_m (g^{mn} R) + c_3 \nabla_m g^{mn} = 0$$

まず、式 5.42 を縮約して $\nabla_m g^{mn} = 0$ である。また、式 6.26 および式 6.27 より、$\nabla_m (g^{mn} R) = 2 \nabla_m R^{mn}$ が成立するので、これらを上式に代入すると、

$$(c_1 + 2c_2) \nabla_m R^{mn} = 0$$

つまり、$c_2 = -c_1/2$ が得られる。したがって、

$$R^{mn} - \frac{1}{2} g^{mn} R - \Lambda g^{mn} = K T^{mn} \tag{7.14}$$

が得られる。$\Lambda = -c_3/c_1, K = c_4/c_1$ と置き換えている。Λg^{mn} は**宇宙項 (cosmological term)** と呼ばれ、宇宙のサイズになると影響が現われてくるが、アインシュタインも最後まで導入すべきかを迷った項である。またその係数 Λ は、**宇宙定数 (cosmological constant)** と呼ばれるが、いまだに値が定まっていない定数である (もしかすると 0

かも知れない)。なお、式 4.59 に示した完全流体の応力テンソルを求めた際に、T^{mn} に g^{mn} を組み込んだように、宇宙項を T^{mn} に組み込むことも可能である。本書ではその立場をとることとし、宇宙項は外した。

$$R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R = KT^{mn} \tag{7.15}$$

最後の K はニュートンの重力場の方程式との対応から値を決めることができる。式 6.26 に示したアインシュタインテンソル $G^{mn} = R^{mn} - g^{mn}R/2$ を使うと、もう少し式を簡単に表すことが可能であるが、だからといって計算が簡単になるわけではないので、以後はこの形の式を利用する。

式 7.15 の両辺に g_{mn} を掛けて縮約を行う。

$$R - 2R = Kg_{mn}T^{mn}$$

これから得られた R を式 7.15 へ代入すると、

$$R^{mn} = K\left(T^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}g_{kl}T^{kl}\right) \tag{7.16}$$

この式は式 7.15 と等価であるため、この式を使って K を求めよう。

まず、重力場は十分小さいとすると、その計量テンソルへの影響も小さいだろうから、g^{mn} の η^{mn} $(= \mathrm{diag}(-1, 1, 1, 1))$ からのずれは微小量である。接続係数も次のように近似できるだろう。

$$\Gamma^k_{lm} \doteqdot \frac{1}{2}\eta^{kn}\left(\partial_l g_{mn} + \partial_m g_{ln} - \partial_n g_{lm}\right)$$

さらに、リッチテンソルも次のように近似できる。

$$\begin{aligned} R_{ml} = R^k_{m,kl} &= (\partial_k \Gamma^k_{lm} + \Gamma^k_{ki}\Gamma^i_{lm}) - (\partial_l \Gamma^k_{km} + \Gamma^n_{ki}\Gamma^i_{km}) \\ &\doteqdot \partial_k \Gamma^k_{lm} - \partial_l \Gamma^k_{km} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}\eta^{kn}\left(\partial_k\partial_l g_{mn} + \partial_k\partial_m g_{ln} - \partial_k\partial_n g_{lm}\right.$$
$$\left. -\partial_l\partial_k g_{mn} - \partial_l\partial_m g_{kn} + \partial_l\partial_n g_{km}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\eta^{kn}\left(\partial_k\partial_m g_{ln} - \partial_k\partial_n g_{lm} - \partial_l\partial_m g_{kn} + \partial_l\partial_n g_{km}\right)$$

ここで、接続係数の微分は十分小さいということで、その二乗の項は削除した。後述との関係から R_{00} だけを計算しよう。また、定常状態を考え $\partial_0 = 0$ としよう。

$$R_{00} = \frac{1}{2}\eta^{kn}\left(\partial_k\partial_0 g_{0n} - \partial_k\partial_n g_{00} - \partial_0\partial_0 g_{kn} + \partial_0\partial_n g_{k0}\right)$$
$$= -\frac{1}{2}\eta^{kn}\partial_k\partial_n g_{00} = -\frac{1}{2}\,\nabla^2\, g_{00} = \frac{1}{2}\,\nabla^2\left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)$$
$$= \frac{1}{c^2}\,\nabla^2\,\phi$$

g_{00} と $\phi(\boldsymbol{x})$ の関係には式 7.4 を利用した。

次に式 7.16 を考えよう。右辺は、式 4.54 より粒子の速度が c に対し十分遅い場合、T^{mn} は $m = n = 0$ を除いてほぼ 0 である。また、$T^{00} \doteqdot \mu_0 c^2$ であるので、上式の右辺は $K\mu_0 c^2/2$ となる。左辺の $R^{00} = g^{0m}g^{0n}R_{mn} = g^{00}g^{00}R_{00} \doteqdot R_{00}$ なので、上の式で与えられる。

これらの結果、式 7.16 で $m = n = 0$ とした場合の式が得られる。

$$\frac{1}{c^2}\,\nabla^2\,\phi = \frac{K}{2}\rho c^2$$

式 7.12 と比較すると、$Kc^4/2 = 4\pi G$ が得られる。これより $K = 8\pi G/c^4$ が得られる。

最終的に得られた方程式は**アインシュタイン方程式** (Einstein equation) と呼ばれ、次式で与えられる。

$$R^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}R = \frac{8\pi G}{c^4}T^{mn} \tag{7.17}$$

改めて、この式を見てみよう。右辺は分布質量を一般化したエネルギー運動量テンソルである。これにより、空間の曲率に影響が出る。その影響は計量テンソルの g^{00} に重力ポテンシャルに対応した変化を与える。その空間の測地線で与えられる質点の運動は、重力中の運動と同じになるのである。

式 7.17 に g^{mn} を掛けて縮約してみよう。

$$R - \frac{1}{2}4R = \frac{8\pi G}{c^4}T \tag{7.18}$$

得られた R を式 7.17 へ代入すると、R^{mn} に対して解きやすい次式が得られる。

$$R^{mn} = \frac{8\pi G}{c^4}(T^{mn} - \frac{1}{2}g^{mn}T) \tag{7.19}$$

7.4 シュバルツシルト計量

本書で書きたいことは前節までで終りである。つまり、重力下での物体の加速運動は空間が曲っているからで、その中での測地線で表現できること、その曲がりの影響はリーマン幾何学により解析できることを示した。さらに、空間の曲がりは全エネルギー運動量テンソルが引き起こすこと、そのテンソルと計量テンソルの関係式はアインシュタイン方程式で表わされることを示した。ということで、本書はここまでで役割を終えたことになるが、やはり、アインシュタイン方程式から逆に測地線までを導き出す例が欲しいであろう。そこで、もっともよく知られているシュバルツシルト計量とその解を示すことにする。

7.4.1　中心対称重力場の計量

アインシュタイン方程式は g^{mn} に対し非線形であり、条件がよくないと、簡単には解けない。しかし、中心に質量が固まっている場合、その周辺の領域に対しては、シュバルツシルトが空間の曲がりを示した。周辺には質量がないため、$T^{mn}=0$ が成立する。そこで解くべき方程式は式 7.19 より、次式のようになる。

$$R^{mn}=0$$

球対称を仮定すると、線素は一般に次式で与えられる。

$$ds^2=-c^2\,d\tau^2=-e^{2f(r)}c^2dt^2+e^{2g(r)}dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta\,d\phi^2$$

デカルト空間の極座標系の線素と比較すると、動径方向と時間方向の計量テンソルが異なっている。これらを指数関数にしたのは、単に数学的に扱いやすくしただけで、物理的に深い意味はない。

これから接続係数を計算すると、0 でないものは以下のようになる（サフィックス t は、ct を塊として演算した結果）。

$$\begin{aligned}
&\Gamma^t_{rt}=\Gamma^t_{tr}=f' && \Gamma^r_{tt}=e^{2(f-g)}f'\\
&\Gamma^r_{rr}=g' && \Gamma^r_{\theta\theta}=-re^{-2g}\\
&\Gamma^r_{\phi\phi}=-re^{-2g}\sin^2\theta && \Gamma^\theta_{r\theta}=\Gamma^\theta_{\theta r}=\Gamma^\phi_{r\phi}=\Gamma^\phi_{\phi r}=\frac{1}{r}\\
&\Gamma^\theta_{\phi\phi}=-\sin\theta\cos\theta && \Gamma^\phi_{\theta\phi}=\Gamma^\phi_{\phi\theta}=\cot\theta
\end{aligned}$$

ここで、「$'$」は r による微分である。さらに、リッチテンソルで 0 でないものを拾い出し、それらを 0 とすると次式が得られる。

$$R_{tt} = e^{2(f-g)}(f'' - f'g' + f'^2 + \frac{2}{r}f') = 0$$
$$R_{rr} = -(f'' - f'g' + f'^2 - \frac{2}{r}g') = 0$$
$$R_{\theta\theta} = 1 + e^{-2g}(rg' - rf' - 1) = 0$$
$$R_{\phi\phi} = R_{\theta\theta}\sin^2\theta = 0$$

R_{rr} と R_{tt} の式より次式が得られる。

$$f' = -g'$$

これを $R_{rr} = 0$ と $R_{\theta\theta} = 0$ へ代入すると、次式が得られる。

$$g'' - 2g'^2 + \frac{2}{r}g' = 0$$
$$1 + e^{-2g}(2rg' - 1) = 0$$

後式は $1 - r(e^{-2g})' - e^{-2g} = 0$ と書き換えられるので、簡単に解ける。

$$e^{-2g} = 1 - \frac{a}{r}$$

この式は $R_{\theta\theta} = 0$ から得られた前式も充足する。また、$f' = -g'$ より次式も得られる。

$$e^{2f} = e^{b}\left(1 - \frac{a}{r}\right)$$

実はここで増えた積分定数 b は dt^2 の計量で吸収できるため、0 としても差し支えない。得られた結果を線素の形に纏めると、次のようになる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= -c^2\,d\tau^2 \\ &= -\left(1 - \frac{a}{r}\right)c^2dt^2 + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2 \end{aligned} \tag{7.20}$$

これがシュバルツシルト計量 (Schwarzschild metric) と呼ばれるものである。

ここで重力場との関係から、a を定めることができる。式 7.4 と $\phi(r) = -GM/r$ の関係から、$g_{00} = -(1 - 2GM/c^2 r)$ であるはずである。そこで式 7.20 と比較して a が得られる。

$$a = 2\frac{GM}{c^2} \tag{7.21}$$

a は長さの単位を持ち、シュバルツシルト半径 (Schwarzschild radius)、もしくは**重力半径** (gravitational radius) と呼ばれる。ちなみに、太陽の場合、$a = 2\times 6.7\times 10^{-11}\mathrm{m}^3\mathrm{kg}^{-1}\mathrm{s}^{-2}\times 2\times 10^{30}\mathrm{kg}/(3\times 10^8\mathrm{ms}^{-1})^2 = 3\times 10^3\mathrm{m}$ である。また、地球では $9\times 10^{-3}\mathrm{m}$ である。こう書くと、それでは太陽の中心では重力半径の影響があるのかというと、そんなことはない。太陽の重力半径以内に入っている質量は減っているので、そこでの重力半径はずっと小さくなるからである。結局、もの凄く密度の高い星で、その重力半径が星の大きさより大きくないと、その影響はないのである。重力半径では、g_{00} が 0 になるため、時計が無限に遅れることになり、どんな物体も光ですらそこから内部へ進入するこができなくなるし、内部からも何も出てこられなくなる。多くの書にはこのように書かれているが、それについても検討を行う。

7.4.2　シュバルツシルト計量空間での測地線

重力半径の意味をより詳細に調べるために、この空間での測地線を求めてみよう。まず、得られた g_{mn} を利用して接続係数 Γ^k_{mn} を求めてみよう。

$$
\begin{aligned}
&\Gamma^t_{tr} = \Gamma^t_{rt} = \frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} && \\
&\Gamma^r_{tt} = \frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right) && \Gamma^r_{rr} = -\frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1} \\
&\Gamma^r_{\theta\theta} = -r\left(1-\frac{a}{r}\right) && \Gamma^r_{\phi\phi} = -r\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin^2\theta \\
&\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} && \Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin\theta\cos\theta \\
&\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} && \Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot\theta
\end{aligned}
$$

これらを利用すると、以下の測地線の方程式が得られる。

$$c\ddot{t} + \frac{a}{r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}c\dot{t} = 0 \tag{7.22}$$

$$\ddot{r} + \frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)c^2\dot{t}^2 - \frac{a}{2r^2}\left(1-\frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - r\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot{\theta}^2 - r\left(1-\frac{a}{r}\right)\sin^2\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{7.23}$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\dot{\phi}^2 = 0 \tag{7.24}$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\phi} + 2\cot\theta\dot{\theta}\dot{\phi} = 0 \tag{7.25}$$

式 7.22 は、両辺に $(1-a/r)/c$ を掛けると簡単に積分できる。

$$\left(1-\frac{a}{r}\right)\dot{t} = K \tag{7.26}$$

なお、積分定数 K は $r\to\infty$ における γ_v である。しかし、軌跡が無限遠からのものでないときには、K は 1 以下であってもよい。

式 7.25 は、両辺に $r^2\sin^2\theta$ を掛けて積分すると、次式のようになる。

$$r^2\sin^2\theta\dot{\phi} = h \qquad (\theta=\pi/2 \text{ のとき } r^2\dot{\phi} = h) \tag{7.27}$$

この式は τ に関する**面積速度一定の法則** (conservation of areas) (角運動量保存則) と呼ばれる。h は角運動量である。

続いて式 7.24 であるが、軸対称性から、一般性を損なうことなく、$\theta = \pi/2$ と仮定してよさそうである。初期条件で $\theta = \pi/2$ かつ $\dot{\theta} = 0$ とすると、$\ddot{\theta} = 0$ となり、以後 θ は一定のままとなることがわかる。この条件では、式 7.27 は $r^2\dot{\phi} = h$ となる。

以上の条件を式 7.23 へ代入しよう。

$$\ddot{r} + \frac{aK^2}{2r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} - \frac{a}{2r^2}\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^3}\left(1 - \frac{a}{r}\right) = 0$$

これを直接解くことも可能であるが、式 7.20 の左辺を $ds^2 \to -c^2d\tau^2$ とし、さらに両辺を $d\tau^2$ で除した次式からスタートする方が、積分を一回省略できる。なお、今迄に得た諸条件を代入してある。

$$-c^2 = -c^2K^2\left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1} + \left(1 - \frac{a}{r}\right)^{-1}\dot{r}^2 + \left(\frac{h}{r}\right)^2 \qquad (7.28)$$

これより直ちに次式が得られる。

$$\dot{r} = \pm\sqrt{c^2(K^2 - 1) + \frac{ac^2}{r} - \frac{h^2}{r^2} + \frac{ah^2}{r^3}} \qquad (7.29)$$

これは一般的には不定積分不能であり、厳密解は得られないが、定性的に得くことは可能である。式 7.28 を適宜変形すると、次の式が容易に得られる。

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left[-\frac{ac^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3}\right] = \frac{1}{2}c^2(K^2 - 1) \qquad (7.30)$$

これは、第一項を T、'[' と']' に囲まれた第二項を $V(r)$、右辺を E と置くと、古典力学におけるエネルギー保存則の式 $T + V = E$ の形をしている。なお、$V(r)$ の第一項の $-ac^2/2r$ は重力場 $-GM/r$ である。

この形に書ける場合には、古典力学における**有効ポテンシャル法** (effective potential method) を用いて、分析することができる。図 7.1

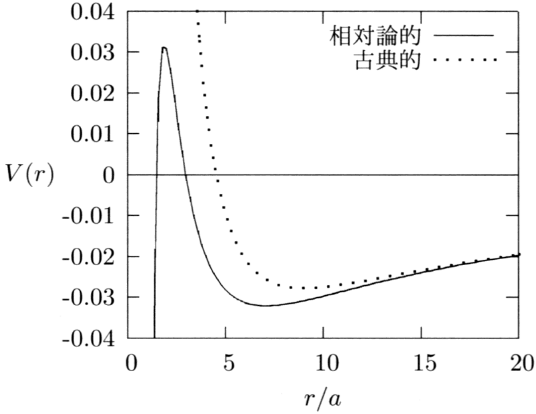


図 7.1 シュバルツシルト空間内の運動の有効エネルギー $V(r)$（a、c を 1 としている。この図は $h/ac=\sqrt{4.5}$ の場合。破線 $\cdots$ は古典的なポテンシャル。$-0.03<E<0$ ではほぼ楕円運動、$E=0$ ではほぼ放物線運動、$0<E<0.03$ ではほぼ双曲線運動、$0.03<E$ では重力中心まで落下運動）

に $h/ac=\sqrt{4.5}$ における $V(r)$ を示す。図では r の大きいところでは $-1/r$ に比例する重力の影響が支配的であり、中心に近いところでは $-1/r^3$ の影響が支配的になり、中間領域は $1/r^2$ の影響で障壁が構成されているが、障壁部分の形は、h の値によってかなり変化する。極大点と極小点の位置を計算しておこう。

$$r=a\left(\frac{h}{ac}\right)^2\left[1\mp\sqrt{1-3\left(\frac{ac}{h}\right)^2}\right] \tag{7.31}$$

この結果より、$h/ac>\sqrt{3}$ であると、極大極小を持つ形になるが、$h/ac<\sqrt{3}$ では極値がなくなり、ポテンシャルは重力中心に向って

単調減少となることがわかる。$h/ac > \sqrt{3}$ の場合、対応する極値は次式のようになる。

$$\frac{c^2}{54}\left\{2\left(\frac{h}{ac}\right)^2 - 9 \pm \left[2\left(\frac{h}{ac}\right)^2 - 6\right]\sqrt{1-3\left(\frac{ac}{h}\right)^2}\right\} \tag{7.32}$$

これより、極大値は $h/ac = 2$ で $V = 0$ となる。さらに、重力半径 $a = r$ では、h/ac の値に関わらず $V = -c^2/2$ となる。

図のように障壁のある場合、適切な E（図では約-0.03 から 0 まで）で水平線を引くと、$V(r)$ と三点で交わる。粒子は、右の二点間で往復運動をする。実空間では、楕円運動に近いを行う。$E = 0$ での放物線に近い運動を経由して、それ以上の E では交点は一点となり、双曲線に近い運動となる。さらに、V の極大値を越える E では、運動は重力中心まで落ち込むものとなる。しかも、その速度は中心に近付くほど速くなる。

ちなみに、h/ac というパラメータが頻出するが、これは円軌道の場合、(軌道半径/2 × 重力半径) の平方根となる量であり、太陽系の惑星の運動などでは、もの凄く大きな量である。例えば地球の軌道では、$h = (1.5\times10^{11}\mathrm{m})^2\times(2\pi/365\times24\times3600\mathrm{s}) = 4.5\times10^{15}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}$ なので、$h/ac = 4.5\times10^{15}\mathrm{m}^2\mathrm{s}^{-1}/(3\times10^3\mathrm{m}\times3\times10^8\mathrm{ms}^{-1}) = 5\times10^3$ となる。したがって、極小点の位置はずっと右に発生し、相対論の影響はほとんどなくなる。

古典力学における惑星の運動を解いておこう。ニュートンの重力場中の質点の運動方程式は次のようである（この囲み内だけ、ドットは t の微分とする）。

$$\ddot{\boldsymbol{r}} = -GM\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} = -\frac{ac^2}{2}\frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \tag{7.33}$$

一方、二次元極座標系では $\boldsymbol{r} = r\,\boldsymbol{e}_r$ であるが、単位ベクトル $\boldsymbol{e}_r$ や $\boldsymbol{e}_\phi$（この章では、基底ではなく長さ 1 のベクトルとする）が運動と共に動くため、若干やっかいである。

$$\boldsymbol{e}_r = \cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y \qquad \boldsymbol{e}_\phi = -\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y$$

したがって、次式が得られる。

$$\dot{\boldsymbol{e}}_r = (-\sin\phi\,\boldsymbol{e}_x + \cos\phi\,\boldsymbol{e}_y)\dot{\phi} = \dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi$$
$$\dot{\boldsymbol{e}}_\phi = -(\cos\phi\,\boldsymbol{e}_x + \sin\phi\,\boldsymbol{e}_y)\dot{\phi} = -\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_r$$

さらに次のようになる。

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{r}} &= \frac{d(r\,\boldsymbol{e}_r)}{dt} = \dot{r}\,\boldsymbol{e}_r + r\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi \\ \ddot{\boldsymbol{r}} &= (\ddot{r}\,\boldsymbol{e}_r + \dot{r}\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi) + (\dot{r}\dot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi + r\ddot{\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi - r\dot{\phi}^2\,\boldsymbol{e}_r) \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\,\boldsymbol{e}_r + (r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi})\,\boldsymbol{e}_\phi\end{aligned}$$

これらを式 7.33 へ代入すると、

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 = -\frac{ac^2}{2r^2} \tag{7.34}$$
$$r\ddot{\phi} + 2\dot{r}\dot{\phi} = 0 \tag{7.35}$$

後式は面積速度一定 $r^2\dot{\phi} = h$ になる。この結果を前式へ代入すると、次の運動方程式が得られる。

$$\ddot{r} + \frac{ac^2}{2r^2} - \frac{h^2}{r^3} = 0 \tag{7.36}$$

　軌道を計算するには、$r(\phi)$ を求める必要があるが、この際、$u(\phi) = 1/r(\phi)$ として計算するのがよい。ダッシュ（$'$）を ϕ による微分とすると、次のようになる。

$$\dot{r} = r'\dot{\phi} = (1/u)'\dot{\phi} = -(u'/u^2)\dot{\phi} = -u'r^2\dot{\phi} = -hu'$$
$$\ddot{r} = -h(du'/dt) = -hu''\dot{\phi} = -hu''(h/r^2) = -h^2u^2u''$$

これらを式 7.36 へ代入すると、$l = 2a(h/ac)^2$ として、

$$u'' + u = 1/l \tag{7.37}$$

というほとんど単振動の式と同じ式が得られる。この解は単振動に一定項のついた次式となる。

$$u = \frac{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)}{l} \tag{7.38}$$

これより、最終の軌跡として次式が得られる。

$$r = \frac{l}{1 + \varepsilon\cos(\phi - \phi_0)} \tag{7.39}$$

これは太陽の位置を焦点の片方とする楕円（または放物線、双曲線）の式である。これより l は軌道の平均半径（厳密には u の平均値の逆数）であることがわかる。また、u を得た際の振幅の任意性を示す ε は、これら二次曲線の**離心率** (orbital eccentricity) であり、$0 \leq \varepsilon \leq 1$ で楕円、1 で放物線、1 以上で双曲線となる。

式 7.36 に $\dot{r}$ を掛けて積分すると、有効ポテンシャル法に持ち込むことができる。右辺の定数は、式 7.39 を使って決定している。

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left[-\frac{ac^2}{2r} + \frac{h^2}{2r^2}\right] = \frac{c^2}{8}\left(\frac{ac}{h}\right)^2(\varepsilon^2 - 1) \tag{7.40}$$

有効ポテンシャル法の相対論的式 7.30 と惑星の有効ポテンシャル法の式 7.40 を比較してみると、右辺が異なるが、これらは共に任意定数なので等しいとすることができる。さらに V の中に r^{-3} の比例項が入っているが、これこそ正に相対論的効果である。この項は r の

大きさが l の程度であるとすると、他の二項と比較し、a/l の程度、つまり（重力半径/軌道サイズ）である。これが 1 に比べ十分小さいという条件で検討を行う。この効果が軌道にどのような影響を与えるかであるが、太陽にもっとも近い水星の楕円軌道全体の長径方向が徐々に（前進）移動していくことが知られている。天文学的には楕円軌道でもっとも太陽に近い**近日点移動** (perihelion shift) という形で知られている。他の惑星からの摂動などの影響を取り去っても、さらに僅かに残る移動があるのである。アインシュタインはこの値を予測することで、一般相対性理論の最初の証としたのである。

相対論の効果はごく僅かなので、そこにおける軌道はほぼ式 7.39 の形で与えられるとする。解析に便利な u で表わすと次式である。

$$u = \frac{1 + e\cos(P\phi)}{L}$$

ϕ_0 は座標をうまく選んだということで除去しているが、L、e、P は振幅 l、離心率 ε、1 からの微小なずれを含んでいる。

$\dot{r} = -hu'$ より、$(1/2)\dot{r}^2 = h^2u'^2/2 = [(heP)^2/2L^2]\sin^2(P\phi) = [(heP)^2/2L^2]\,[1-\cos^2(P\phi)]$。これらを式 7.30 に代入すると次のようになる。

$$\begin{aligned}&(heP)^2[1-\cos^2(P\phi)]/2L^2 - ac^2[1+e\cos(P\phi)]/2L\\&\quad + h^2[1+2e\cos(P\phi)+e^2\cos^2(P\phi)]/2L^2\\&\quad - ah^2[1+3e\cos(P\phi)+3e^2\cos^2(P\phi)+O(e^3)]/2L^3\\&=(ac^2)^2(\varepsilon^2-1)/8h^2\end{aligned}$$

離心率 e は円軌道に近いため、ほぼ 0 であるため、e^3 の項は無視した。この式の cos の冪乗の係数比較の式を連立させると、L、e、P が容易に得られ、いずれにも $(ac/h)^2$ に比例する微小なずれが現われる

が、特に P に着目すると、cos の 2 次の係数の比較が重要となる。

$$-h^2(eP)^2/2L^2 + e^2h^2/2L^2 - 3e^2ah^2/2L^3 = 0$$

これより、$L \fallingdotseq l$ として得られる P は

$$P = \sqrt{1 - 3a/L} = \sqrt{1 - 3a/l} \fallingdotseq 1 - 3a/2l$$

となる。軌道の近日点は、$P\phi = 2\pi$ となるごとに発生するので、ϕ は 2π ではなく、次の角度だけ回ることになる。

$$2\pi/P = 2\pi\left(1 + \frac{3a}{2l}\right) \tag{7.41}$$

ちなみに、太陽の相対論的効果をもっとも受けやすい水星ですら、43 秒/100 年というごく小さな値である。最近の観測結果はこの値の ±1% 以内であり、この一致から一般相対性理論の信頼性が格段に上がったのである。

7.4.3　重力場における光の測地線

アインシュタインの考えた等価原理にしたがうと、光線も重力下では落下し、**光の湾曲 (light bending)** が現われるはずである。光線の軌跡を解く際、ほとんどの作業は質点の軌跡と同じである。ただし、$ds = 0$ なので、s の替りに媒介変数 σ を利用する必要がある。したがって、前出の測地線の方程式 7.22 から式 7.25 の $\dot{r}$ などの微分はすべて σ による微分とする必要がある。また、r に関する測地線を求める際に利用した式 7.28 は、左辺を $c^2 \to 0$ としてから、全体を $d\sigma^2$ で割る。$\dot{t}$ および $\dot{\phi}$ には、式 7.26 および式 7.27 は成立するので、次式に見られるように、式 7.30 の V の括弧内から $-1/r$ が消えること

と、右辺が変る以外はすべて同じ形になる。

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \left[\frac{h^2}{2r^2} - \frac{ah^2}{2r^3}\right] = \frac{1}{2}c^2K^2 \tag{7.42}$$

V の括弧内第二項の相対論的効果がない場合の軌道は、次式で与えられる。

$$r = \frac{R}{\cos(\phi - \phi_0)} \tag{7.43}$$

ただし、$R = h/cK$ である。これが正しいことは、$\dot{r} = -hu' = -h(1/r)'$ を利用して、この式を式 7.42 に代入することで確かめられる。また、この式は直線を極座標系で表示したものになっている。

相対論的補正が入った場合には、次のような解を仮定する。

$$r = \frac{R}{\cos\phi + f(\phi)}$$

ここでも、ϕ_0 は、座標をうまく選んだということで除去している。これを代入すると、次の微分方程式が得られるが、これは定数変化法で解くことができる。

$$f(\phi)\cos\phi - f'(\phi)\sin\phi = (a/2R)\cos^3\phi$$

ただし、f の二乗等、微小量は無視した。

$$f(\phi) = \frac{a}{4R}\left[3 - \cos(2\phi)\right] + A\sin\phi$$

一般性を損なうことなく $A = 0$ とすることができるので、相対論的光の軌道は次のようになる。

$$r = \frac{R}{\cos\phi + (3a/4R) - (a/4R)\cos(2\phi)} \tag{7.44}$$

r が無限大になるところでの ϕ を求めると、光の湾曲は $2a/R$ であることが導かれる。太陽表面をすれすれに通過する恒星の位置ずれを想定する場合、1.74 秒となることが導かれる。観測結果は $\pm 15\%$ 程度の誤差範囲で予測に一致している。

7.4.4　重力赤方偏移

重力ポテンシャルの大きなところで発射された光を重力ポテンシャルの小さいところで観測すると、周波数が低く見えることを、**重力赤方偏移** (gravitational redshift) という。これは、空間に固定された二点間の間の時間間隔に対して

$$-c^2 d\tau^2 = g_{00} c^2 dt^2$$

が成立するため $\sqrt{-g_{00}}$ の影響を受けることによる。重力ポテンシャルの大きなところで発射されたパルス間隔 dt に対する $d\tau$ は $\sqrt{-g_{00}}$ が小さい分、短くなる。時間間隔は固有時間で観測されるため、この $d\tau$ の差が周波数の差を与える。

この他にもいくつかの一般相対性原理に基づく効果があるが、詳細は天文学や一般相対性理論に特化した書など[*1]を参考にしてほしい。

7.4.5　ブラックホール

重力半径 a では、$g_{00} = -(1 - a/r) = 0$ となり、時計が無限に遅れることになり、どんな物体も光ですら、そこへ到達したりそこから外へ脱出するには無限の時間がかかることになる。そこで、この半径

[*1] 例えば、窪田高弘、佐々木隆「相対性理論」裳華房テキストシリーズ-物理学（2001）など

以下のサイズを持つ星は**ブラックホール** (black hole) と呼ばれる。一方で、図 7.1 のところで述べたように、十分高い E を有する粒子は、中心に向って落下していくが、$r = a$ に達したときにも有限の速度 $\dot{r}$（四元速度の第 1 成分）を持って突入していくのである。

ということで、重力半径 a で何が起るのかをやや詳細に検討してみよう。特に関心が高いのは、重力半径付近における質点の速度である。議論を簡単にするために、$h = 0$ の直線運動を仮定しよう。式 7.29 から直ちに次式が得られる。

$$\frac{1}{c}|\dot{r}| = \frac{1}{c}\left|\frac{dr}{d\tau}\right| = \sqrt{K^2 - 1 + a/r}$$

$\dot{r}$ は落下時に負、打上げ時に正となる。$r = r_0$ で $\dot{r} = 0$ だったとすると、$K = \sqrt{1 - a/r_0}$ である。この場合、上式は次のように書ける。

$$\frac{1}{c}|\dot{r}| = \sqrt{a/r - a/r_0} \tag{7.45}$$

一方、式 7.26 の K を置き換えると、直ちに次式が得られる。

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\tau} = \frac{\sqrt{1 - a/r_0}}{1 - a/r} \tag{7.46}$$

これらの結果を図 7.2 に示す。$|\dot{r}|$ を見ると、任意の点 r_0 から $r \geq 0$ の任意の点まで、有限の固有時間で到達できることがわかる。しかし、g_{00} および g_{11} の符号が変るという大事件の起る $r = a$ を質点が何の影響も感じず連続的に通過するのはむしろおかしいような気がする。一方、$\dot{t}$ は $r = a$ で無限大になる。古典的速度であるこれら二つの比 $|dr/dt|$ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{c}\left|\frac{dr}{dt}\right| = \frac{(1 - a/r)\sqrt{a/r - a/r_0}}{\sqrt{1 - a/r_0}} \tag{7.47}$$

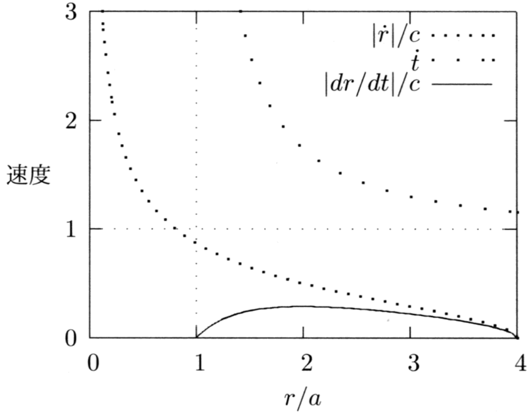


図 7.2　$r=4$ より重力中心に落下していく質点の速度 $|\dot{r}|/c$、$\dot{t}$、および $|dr/dt|/c$ の位置依存性（いずれも質点は右の方から位置 r を短縮しながら落下してくる。半径速度 $|\dot{r}|/c$ は重力半径では特に何も起きないが、時間速度 $\dot{t}$ はそこで無限大になる。古典的速度 $|dr/dt|/c$ は 0 となる。）

その結果も同図に示すが、$r=a$ に近寄るにつれて減少していき、運動は重力半径で停止するかに見える。これ故に、どんな物質でも重力半径に補足されてしまうという理解が広まっている。

ここで一つ疑問がある。この現象を観測している人に対し、時間は t で経過していくのであろうか。改めて、r や t がどういう役割を演ずるために導入されたかを考えてみよう。これらの座標系は、質点の運動が測地線になるように導入された座標系であり、実際の寸法に裏打ちされた座標系ではないのである。例えば、二次元極座標系で、ある半径における円周を計算するには、$d\phi$ の積分では駄目で、$r\,d\phi$ を用いて計算しなければならない。同様に、シュバルツシルト計量で、

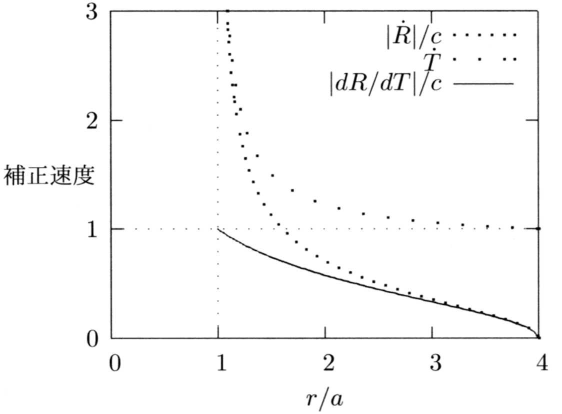


図 7.3　$r = 4$ より重力中心方向に落下していく質点の（固有補正された）速度 $|\dot{R}|/c$、$\dot{T}$ および $|dR/dT|/c$ の位置依存性（いずれも質点は右の方から位置 r を短縮しながら落下してくる。補正された半径速度 $|\dot{R}|/c$ も時間速度 $\dot{T}$ も重力半径で無限大になるが、これらの比である古典的速度 $|dR/dT|/c$ は 1（光速）となる。

実際の寸法を議論するには、r 方向には $dR = dr/\sqrt{1-a/r}$、ct 方向には $c\,dT = c\,dt\sqrt{1-a/r}$ を用いて計算すべきではないだろうか。

そこで、これらの固有時間（距離）で補正された速度を計算してみると次のようになる。

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{c}|\dot{R}| &= \frac{1}{c}\frac{dR}{d\tau} = \frac{|\dot{r}|}{c}\frac{1}{\sqrt{1-a/r}} = \frac{\sqrt{a/r - a/r_0}}{\sqrt{1-a/r}} \\
\dot{T} &= \frac{dT}{d\tau} = \dot{t}\sqrt{1-a/r} = \frac{\sqrt{1-a/r_0}}{\sqrt{1-a/r}}
\end{aligned}
\tag{7.48}
$$

これらの結果を図 7.3 に示す。固有補正を行った速度は、いずれ

も $r = a$ で無限大に発散する。古典的速度であるこれら二つの比 $|dR/dT|$ は次式で与えられる。

$$\frac{1}{c}\left|\frac{dR}{dT}\right| = \frac{1}{c}\left|\frac{\dot{R}}{\dot{T}}\right| = \frac{\sqrt{a/r - a/r_0}}{\sqrt{1 - a/r_0}} \tag{7.49}$$

重力半径に近寄るにつれて徐々に加速され、そこで光速となる。

光の場合には次のようになる。半径方向の運動を仮定すると、$h = 0$ なので $\dot{r}$ については、式 7.42 より次式が成立する。

$$\frac{1}{c}|\dot{r}| = K \tag{7.50}$$

また、$\dot{t}$ については、式 7.26 が成立する。いずれの場合も微分の分母は媒介変数である。また、媒介変数を τ とすると、両式共 $K = 1$ である。したがって、$|\dot{r}|$ に対しては、光は一定速度 c で落下していく。一方、$\dot{t}$ については、十分遠方では $c\dot{t} = c$ であるが、$r = a$ に近付くにつれて無限大に発散する。

この結果、$|dr/dt|$ は次のようになる。

$$\frac{1}{c}\left|\frac{dr}{dt}\right| = 1 - a/r \tag{7.51}$$

つまり、光も重力半径に近付くと、その見掛けの速度を落し、重力半径で停止することになる。多くの書でも、この式により、光すら重力半径を抜けることができないと記載されている。しかし、固有時間（距離）で修正された速度は、次式に示すように光速 c であることがわかる。

$$\frac{1}{c}\left|\frac{dR}{dT}\right| = \frac{1}{1 - a/r}\frac{1}{c}\left|\frac{dr}{dt}\right| = 1 \tag{7.52}$$

つまり、光の速度は断固 c であり、その速度で重力半径まで落下する。

質点にせよ、光にせよ、いずれの考えに立脚しても、有限時間で重力半径まで落下できるということは、重力半径の位置から放出された質点や光も有限時間で外へ脱出できることになる。一般に知られている落ちこんだものは質点であろうと光であろうと戻ってくるには無限の時間がかかるため、黒く見えるという**ブラックホール** (black hole) のイメージとは異なる結論が得られてしまった。

実はブラックホールに質点や光が落ち込むあるいは脱出してくる速度の議論は、速度をどう定義されるかに関わってくる。dr/dt が本当に観測される速度でなく、適宜に定めた座標系における見掛けの速度であることは多くの相対性理論の書籍に記載されているが、それでは、本当に観測される速度は何であるかについては、あまり書かれていないようである。その意味で、観測される距離や時間が固有時間（距離）を物差しにしている、さらに、観測される速度はその比率であるという記述は、厳密には私独自の仮説である。重力赤方遷移の観測時間が固有時間であることは、多くの書籍に記載があるので、時間方向について正しいことは、距離方向についても正しいはずなので、恐らく、私のこの仮説は間違っていないものと思われるが、そうなると、ブラックホールの解釈が通説と大きく変ってくるのである。読者は、まだこの辺りに議論の余地があることに注意してほしい。

重力半径の内側の解析はちょっと面倒である。半径方向の運動に限定して $d\theta = d\phi = 0$ とすると、$(1 - a/r) < 0$ なので、式 7.20 に示したシュバルツシルト計量は次のような式となる。

$$ds^2 = -c^2\,d\tau^2 = \left(\frac{a}{r} - 1\right) c^2 dt^2 - \left(\frac{a}{r} - 1\right)^{-1} dr^2 \qquad (7.53)$$

式としては前出のものと同じであるが、係数が正になるようにし、それに合せ符号を調整してある。一般に、計量 $ds^2 = -c^2 c\tau^2$ に対する影響は、$c^2 dt^2$ の入った時間項の寄与が dr^2 の入った空間項に優る。

通常の空間では前者が負の寄与を、後者が正の寄与をするため、全体が負、つまり $d\tau$ が実数になるのであるが、重力半径内では、両者の寄与が符号反転するため、全体が正となり、$d\tau$ が虚数となるというか、ds が実数となる。元々質点の運動は $d\tau$ が実数になる光円錐の内部に限られており、それが故に光速を越えないことが保証されていたのであるが、それが光速を越えることになるのである。このため、色々不都合が生じる。

しかしながら、重力半径以内の物理については、本書のカバーする領域を越えていると思っている。そもそも、こんな強い重力下でも、一般相対性理論の式がそのまま適用できるかという問題もあるが、そんな世界を実際に見た人もいないし、実験結果もないので、科学者が勝手に想像することを許された世界と言えよう。重力半径以内の物理にさらなる興味のある場合には、他書[*2]を参照して欲しい。

7.5　むすび

以上で、本書を終了するが、相対性理論についてはもっと記載したいこともない訳ではない。しかし、特殊相対性理論についても、一般相対性理論についても、重要な基礎的な考えについてはすべて記述したと思っている。ここまで読めばさらなる事項についても早く理解が進むものと期待している。なお、エネルギー運動量応力テンソルの詳細、空間微分演算子については付録に回した。興味のある人は、ぜひそこにも目を通してほしい。

[*2] 146 の脚注に示した書や、ジェームス・B・ハートル著、牧野伸義訳「重力–アインシュタインの一般相対性理論入門」, ピアソン・エデュケーション（2008）など

付録 A

空間微分演算子

電磁気学でよく出現する grad、div、rot といった空間微分演算子は曲線座標系でどのような形になるのであろうか。これらの算出方法を示す。

A.1　接続係数の計算

まず接続係数に関する二つの公式を示しておこう。接続係数を直接算定するのは、項目が多く、結構面倒であるが、g を g_{mn} を要素とする行列式として、

$$dg = dg_{mn}\, g^{mn}\, g \tag{A.1}$$

の関係があることを利用して誘導される次の二式を使うと計算が簡単になることが多い。

$$\Gamma^k_{mn}\, g^{mn} = -\frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_l\left(\sqrt{g}\, g^{lk}\right) \tag{A.2}$$

$$\Gamma^m_{mn} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_m\sqrt{g} \tag{A.3}$$

なお、g が負となる場合は、$\sqrt{g}$ の代わりに $\sqrt{-g}$ を用いる。

式 A.1 の証明から始めよう。また、三次元空間での証明を行うが、これと同じ方法で、もっと多次元空間の証明ができることを認識してほしい。

$$\begin{aligned}
dg &= d\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} dg_{11} & g_{12} & g_{13} \\ dg_{21} & g_{22} & g_{23} \\ dg_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & dg_{12} & g_{13} \\ g_{21} & dg_{22} & g_{23} \\ g_{31} & dg_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & dg_{13} \\ g_{21} & g_{22} & dg_{23} \\ g_{31} & g_{32} & dg_{33} \end{vmatrix} \\
&= dg_{11}\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} - dg_{21}\begin{vmatrix} g_{12} & g_{13} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} + \cdots \\
&= (dg_{11}\,g^{11} + dg_{21}\,g^{21} + dg_{31}\,g^{31})\,g + \cdots + \cdots \\
&= dg_{mn}\,g^{mn}\,g
\end{aligned}$$

となり、与式が得られる。ここで、下から二番目の等号であるが、

$$\begin{vmatrix} g_{22} & g_{23} \\ g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & g_{12} & g_{13} \\ 0 & g_{22} & g_{23} \\ 0 & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g^{11}\,g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g^{11}\,g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g^{11}\,g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} = g^{11}\,g$$

などの式を利用して変形した。

式 A.2 の証明は以下のようである。

$$\begin{aligned}
\Gamma^k_{mn}\,g^{mn} &= \frac{1}{2}(g^{mn}\,g^{kl}\,\partial_m g_{ln} + g^{mn}\,g^{kl}\,\partial_n g_{ml} - g^{mn}\,g^{kl}\,\partial_l g_{mn}) \\
&= g^{mn}\,g^{kl}\,\partial_m g_{ln} - \frac{1}{2}g^{mn}\,g^{kl}\,\partial_l g_{mn}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\partial_l g^{lk} - \frac{1}{2} g^{kl} \, \frac{\partial_l g}{g} \\
&= -\frac{1}{\sqrt{g}} \, \partial_l \left(\sqrt{g} \, g^{lk} \right)
\end{aligned}
$$

このうち二番目の等号は、その前の式の第二項で m, n を入れ替えて、第一項と同じ形として 2 倍している。また三番目の等号後の前項は $g^{mn} \, \partial_n (g^{kl} \, g_{ln}) = g^{mn} \, \partial_n \delta^k_n = 0$ の左辺を部分微分することにより得られる $\partial_n g^{km} + g^{mn} \, g^{kl} \, \partial_n g_{ln} = 0$ を利用して変更した。また後項は式 A.1 を利用した。

同様に式 A.3 の証明は以下のようになる。

$$
\begin{aligned}
\Gamma^m_{mn} &= \frac{1}{2} g^{ml} \left(\partial_m g_{ln} + \partial_n g_{ml} - \partial_l g_{mn} \right) \\
&= \frac{1}{2} g^{ml} \, \partial_n g_{ml} = \frac{1}{2} \frac{\partial_m g}{g} = \frac{1}{\sqrt{g}} \, \partial_n \sqrt{g}
\end{aligned}
$$

このうち二番目の等号は、その前の式の第三項で m, n を入れ替えて、第一項と同じ形として相殺している。三番目の等号は式 A.1 を利用した。

A.2　空間微分演算子

まず grad であるが、デカルト座標系では以下のように定義されている。ただし、本節ではデカルト座標系と曲線座標系の次元数は等しいとする。

$$
\text{grad} \, f = \partial_M f \, \boldsymbol{e}^M = \partial_M f \, g^{MN} \, \boldsymbol{e}_N \tag{A.4}
$$

これを座標変換すると次のようになる。

$$\partial_M f\, g^{MN}\, \boldsymbol{e}_N = (\partial_M x^m\, \partial_m f)\,(\partial_m x^M\, g^{mn}\, \partial_n x^N)\,(\boldsymbol{e}_n\, \partial_N x^n) \\ = \partial_m f\, g^{mn}\, \boldsymbol{e}_n \tag{A.5}$$

と、曲線座標系においてもデカルト座標系と同じような形に変換されるので、これでよいことがわかる。

$$\mathsf{grad}\, f = \partial_m f\, g^{mn}\, \boldsymbol{e}_n \tag{A.6}$$

あるいは

$$(\mathsf{grad}\, f)^n = \partial_m f\, g^{mn} \tag{A.7}$$

$\mathsf{div}\, \boldsymbol{A}$ はデカルト座標系において $\partial_M A^M$ であるが、これを変換すると、本節で述べたように同じような形とはならない。結局、$\nabla_M\, A^M$ を変換するのがよい。ただし、この式は、デカルト座標系では $\partial_M A^M$ と同じ値をとる。曲線座標系では次のように、接続係数を必要とする。これを式 A.3 を使って書き直す。

$$\begin{aligned} \mathsf{div}\, \boldsymbol{A} &= \nabla_m\, A^m = \partial_m A^m + \Gamma^m_{mk}\, A^k \\ &= \partial_m A^m + \frac{1}{\sqrt{g}}\,(\partial_k \sqrt{g})\, A^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_m\,(\sqrt{g}\, A^m) \end{aligned} \tag{A.8}$$

$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A}$ はデカルト座標系において、次のように定義されている。

$$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A} = \epsilon^{MNK}\, \partial_M A_N\, \boldsymbol{e}_K \tag{A.9}$$

ここで、ϵ^{MNK} は完全反対称テンソルである。つまり、N, M, K が $1, 2, 3$ の偶置換である場合に 1、奇置換である場合に -1、それ以外は

0 という量である。まず、この変換則を調べておこう。例えば、ϵ^{mnk} を変換してみよう。なお、行列式中のサフィックス $1,2,3$ は m,n,k のとる値である。

$$\partial_m x^M \, \partial_n x^N \, \partial_k x^K \, \epsilon^{mnk} = \begin{vmatrix} \partial_1 x^M & \partial_1 x^N & \partial_1 x^K \\ \partial_2 x^M & \partial_2 x^N & \partial_2 x^K \\ \partial_3 x^M & \partial_3 x^N & \partial_3 x^K \end{vmatrix} \tag{A.10}$$

(N,M,K) が $(1,2,3)$ の偶置換の場合、右辺は $\partial_m x^M$ の作る行列式 $J = |\{\partial_m x^M\}|$ になる。奇置換の場合、右辺は $-J$ になり、それ以外の場合、右辺は 0 となる。つまり ϵ^{MNL} の J 倍になる。

$$\partial_m x^M \, \partial_n x^N \, \partial_k x^K \, \epsilon^{mnk} = J \, \epsilon^{MNL} \tag{A.11}$$

これから ϵ^{mnk}/J がテンソルとなることがわかる。$\partial_M A^N$ の変換も共変微分に変更する必要があり、接続係数を必要とする。この結果、次の式が得られる。

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \ \nabla_m A_n \, \boldsymbol{e}_k = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \left(\partial_m A_n - \Gamma^l_{mn} A_l \right) \boldsymbol{e}_k \tag{A.12}$$

しかし、この式で $\epsilon^{mnk} \Gamma^l_{mn}$ は m,n が ϵ^{mnk} に対し反対称なのと Γ^l_{mn} に対し対称であることから、自己消去する。そこで、次式が得られる。

$$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \, \partial_m A_n \, \boldsymbol{e}_k \tag{A.13}$$

あるいは、

$$(\mathrm{rot}\, \boldsymbol{A})^k = \frac{1}{J} \epsilon^{mnk} \, \partial_m A_n \tag{A.14}$$

最後にラプラシアンを扱おう。証明は略すが、$\nabla^2 f$ が不変量となるためには、共変微分を使った次式のような形でなければならない。

$$\nabla^2 f = g^{mn}\ \nabla_m \nabla_n f = g^{mn}\, \partial_{mn} f + \Gamma^k_{mn}\, g^{mn}\, \partial_k f \qquad \text{(A.15)}$$

これから、式変形をしていくことも可能であるが、$\nabla^2 f = \mathsf{div}(\mathsf{grad}\, f)$ を利用し、div $\boldsymbol{A}$ の変換式に $\boldsymbol{A} = \mathsf{grad}\, f$ の変換式を代入する方が簡単である。

$$\nabla^2 f = \mathsf{div}\,(\mathsf{grad}\, f) = \frac{1}{\sqrt{g}}\, \partial_m \left(\sqrt{g}\, g^{mn}\, \partial_n f\right) \qquad \text{(A.16)}$$

A.3　スケール因子

この節では直交曲線座標系に限った議論を行なおう。微分幾何学の世界では、基底より長さ 1 の**単位ベクトル** (unit vector) が多用されている。そこで、基底 $\boldsymbol{e}_m$ と同じ方向を持つ単位ベクトル $\boldsymbol{e}^u_m$ を考える。

$$\boldsymbol{e}_m = h_m \boldsymbol{e}^u_m \qquad \text{(A.17)}$$

ここで、h_m は**スケール因子** (scale factor)、つまり基底の長さである。$\boldsymbol{e}_m$ は共変的であるが、h_m や $\boldsymbol{e}^u_m$ はテンソルではなく、アインシュタイン規約が適用できないため、本節では丁寧に総和記号を使っていく。

自然基底が互いに直交しているので、

$$\boldsymbol{e}^u_m \cdot \boldsymbol{e}^u_n = \delta_{mn} \qquad \text{(A.18)}$$

これより計量テンソルは次式で与えられる。

$$g_{mn} = \boldsymbol{e}_m \cdot \boldsymbol{e}_n = h^2_m \delta_{mn} \qquad \text{(A.19)}$$

また逆に、逆に次式が成立する。

$$h_m = \sqrt{g_{mm}} \tag{A.20}$$

線素を決める dx^m も長さ h_m を基準ではなく、1 の何倍であるかで定義されるため、$dx_u^m = dx^m h_m$ が成立し、線素ベクトルは次のようになる。

$$d\boldsymbol{s} = \sum_m dx^m \boldsymbol{e}_m = \sum_m dx^m h_m \boldsymbol{e}_m^u = \sum_m dx_u^m \boldsymbol{e}_m^u \tag{A.21}$$

このため、次式を満す。

$$ds^2 = \sum_{mn} dx_u^m dx_u^n \boldsymbol{e}_m^u \cdot \boldsymbol{e}_n^u = \sum_{mn} dx_u^m dx_u^n \delta_{mn} \tag{A.22}$$

任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ の反変成分についても、今迄は $\boldsymbol{e}_m$ を基底としたが、$\boldsymbol{e}_m^u$ を使った実の長さ $A_u^m = A^m h_m$ が使われる。

$$\sum_m \boldsymbol{A} = A_m \boldsymbol{e}^m = \sum_m A_m (h_m \boldsymbol{e}_m^u) = \sum_m A_m^u \boldsymbol{e}_u^m \tag{A.23}$$

今迄の共変成分 A^m に対して、この $A_u^m = A^m h_m$ を**物理成分** (physical component) という。ちなみに式 A.21 と比較してみると、同じ形をしている。

双対基底 $\boldsymbol{e}^m$ は $\boldsymbol{e}_m$ と同じ方向を持つ。$\boldsymbol{e}_u^m = \boldsymbol{e}_m^u$ としてみよう。直交曲線座標系では、この結果、$\boldsymbol{e}_u^m$ も互いに直交する長さ 1 の正規直交基底となる。つまり、$\boldsymbol{e}_u^m$ は自己双対である。ここで、双対基底を $\boldsymbol{e}^m = (1/h_m)\, \boldsymbol{e}_u^m$ としてみよう。すると、

$$g^{mm} = \boldsymbol{e}^m \cdot \boldsymbol{e}^n = \frac{1}{h_m}\, \boldsymbol{e}_u^m \cdot \frac{1}{h_n}\, \boldsymbol{e}_u^n = \frac{1}{h_m^2}\, \delta^{mn} \tag{A.24}$$

となり、確かに双対座標系の条件を満足している。$\boldsymbol{e}^m$ を用いると、$dx_m^u = dx_m/h_m$ なので、線素ベクトルは次のようになる。

$$d\boldsymbol{s} = \sum_m dx_m\, \boldsymbol{e}^m = \sum_m dx_m \frac{1}{h_m} \boldsymbol{e}_u^m = \sum_m dx_m^u \boldsymbol{e}_u^m \qquad (A.25)$$

直ぐにわかるように $dx_m^u = dx_u^m$ である。また、任意ベクトル $\boldsymbol{A}$ についても、$A_m^u = A_u^m$ である。

これらの結果、$\boldsymbol{e}_m$、$\boldsymbol{e}_m^u$、$\boldsymbol{e}_u^m$、$\boldsymbol{e}^m$ はすべて同じ方向で、長さが h_m、1、1、$1/h_m$ のベクトルである。同様に、ベクトルの成分 A^m、A_u^m、A_m^u、A_m は、長さが $(1/h_m) : 1 : 1 : h_m$ の比になる。

なお、多くの曲線座標系の変換の議論はデカルト座標を基礎とするが、デカルト座標では $g_{MN} = \delta_{MN}$ であるので、以下の式で計算することができる。

$$g_{mn} = \sum_M \partial_m x^M\, \partial_n x^M \quad (g_{MN} = \delta_{MN}\text{に注意}) \qquad (A.26)$$

また、$J = |\{\partial_m x^M\}|$ であるから、
$|\{g_{mn}\}| = |\{\partial_m x^M\}|\,|\{\partial_n x^M\}| = J^2$ となる。さらに直交曲線座標系では g_{mn} は非対角要素を有しないため、次式が成立する。

$$J = \sqrt{|\{g_{mm}\}|} = \sqrt{\prod_m g_{mm}} = \prod_m h_m \quad (\text{直交曲線座標系の場合}) \qquad (A.27)$$

A.4　直交曲線座標系における空間微分演算子

一般の曲線座標系での grad、div、rot といった微分演算がどのような形になるかは前節で詳しく述べたが、実用的には、直交曲線座標系での形がしばしば必要となることが多い。

なお、以下にもこのように h_m が入ってくる式が現われるが、これらはすべてアインシュタイン規約ではないので注意して欲しい。h_m が入って、さらに総和記号が必要なところは、その都度、総和記号を記載することとする。

A.4.1　勾配

$\mathrm{grad}\,f$ を計算するには、前節に示した $\mathrm{grad}\,f = \partial_m f\, g^{mn}\,\boldsymbol{e}_n$ へ $\boldsymbol{e}_m = h_m\,\boldsymbol{e}^u_m$ を代入する。

$$\mathrm{grad}\,f = \sum_n \partial_m f\, g^{mn}\, h_n \boldsymbol{e}^u_n = \sum_m \partial_m f\, \frac{1}{h_m}\, \boldsymbol{e}^u_m \tag{A.28}$$

この結果、次式が得られる。

$$(\mathrm{grad}\ f)^m = \frac{\partial f}{\partial x^m}\,\frac{1}{h_m} \tag{A.29}$$

A.4.2　発散

発散については、前節の $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} = \sum_m \partial_m(\sqrt{g}\,A^m)/\sqrt{g}$ を利用する。

$$\begin{aligned}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} &= \sum_m \frac{1}{\sqrt{g}}\,\partial_m\left(\sqrt{g}\,\frac{A^m_u}{h_m}\right)\\ &= \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\left(\frac{\partial(h_2\,h_3\,A^1_u)}{\partial x^1} + \frac{\partial(h_3\,h_1\,A^2_u)}{\partial x^2} + \frac{\partial(h_1\,h_2\,A^3_u)}{\partial x^3}\right)\end{aligned} \tag{A.30}$$

A.4.3　回転

回転についても、前節の定義を利用する。

$$\mathrm{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{J}\,\epsilon^{mnk}\,\partial_m A_n\,\boldsymbol{e}_k \tag{A.31}$$

ここで、右辺各項を書き直すと次式が得られる。

$$\mathsf{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3} \sum_{mnk} \epsilon^{mnk}\, \frac{\partial(h_n\,A_n^u)}{\partial x^m}\, h_k\,\boldsymbol{e}_k^u \tag{A.32}$$

$(\mathsf{rot}\,\boldsymbol{A})^k$ を求めるには、右辺から $\boldsymbol{e}_k^u$ を外せばよい。また、$A_n^u = A_u^n$ であるので、$\boldsymbol{A}$ の n 方向の成分の実の長さである。

A.4.4　ラプラシアン

最後にラプラシアンであるが、前節の
$\nabla^2 f = \partial_m(\sqrt{g}\,g^{mn}\,\partial_n f)\,/\sqrt{g}$ を利用する。

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3}\,\partial_m(h_1\,h_2\,h_3\,g^{mn}\,\partial_n f) = \frac{1}{h_1\,h_2\,h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h_2\,h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial x^1}\right) + \frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h_3\,h_1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x^3}\left(\frac{h_1\,h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial x^3}\right)\right] \tag{A.33}$$

以下、代表的な直交曲線座標系に対し、今迄調べたことを示していこう。

[例 A.1] [二次元極座標系]　計量係数は

$$(\{g_{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, r^2) \tag{A.34}$$

であるので、

$$g = r^2$$
$$J = \sqrt{g} = r$$
$$(\{h_m\}) = \begin{pmatrix}1 & r\end{pmatrix}$$

これらの結果を利用して、各種微分演算を求めることができる。

$$\mathsf{grad}\, f = \partial_r f\, \boldsymbol{e}_r^u + \frac{1}{r}\,\partial_\phi f\, \boldsymbol{e}_\phi^u \tag{A.35}$$

$$\mathsf{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\, A_u^r)}{\partial r} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi}\right) \tag{A.36}$$

$$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial A_u^\phi}{\partial r} - \frac{\partial(r\, A_u^r)}{\partial \phi}\right) \tag{A.37}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right] \tag{A.38}$$

二次元空間なので、$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A}$ の計算では、$h_3 = 1$、$\boldsymbol{e}_3^u = \boldsymbol{e}_r^u \cdot \boldsymbol{e}_\phi^u$ とした。

[例 A.2] [球面幾何学]　$(\{m\}) = (\theta, \phi)$ として、

$$(\{g_{mn}\}) = a^2\,\mathrm{diag}(1, \sin^2\theta) \tag{A.39}$$

これより、

$$g = a^4 \sin^2\theta$$
$$J = \sqrt{g} = a^2 \sin\theta$$
$$(\{h_m\}) = \begin{pmatrix} a & a\sin\theta \end{pmatrix}$$

これらの結果を利用して、各種微分演算を求めることができる。

$$\mathsf{grad}\, f = \frac{1}{a}\left(\partial_\theta f\, \boldsymbol{e}_\theta^u + \frac{1}{\sin\theta}\,\partial_\phi f\, \boldsymbol{e}_\phi^u\right) \tag{A.40}$$

$$\mathsf{div}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, A_u^\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi}\right) \tag{A.41}$$

$$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A} = \frac{1}{a\sin\theta}\left(\frac{\partial(\sin\theta\, A_u^\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_u^\theta}{\partial \phi}\right) \tag{A.42}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{a^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right] \tag{A.43}$$

二次元空間なので、$\mathsf{rot}\, \boldsymbol{A}$ の計算では、$h_3 = 1$、$\boldsymbol{e}_3^u = \boldsymbol{e}_\theta^u \cdot \boldsymbol{e}_\phi^u$ とした。

[例 A.3] [三次元極座標系]　三次元の極座標系の順変換に関る諸量は以下のようである。

$$x = r\sin\theta\cos\phi$$
$$y = r\sin\theta\sin\phi$$
$$z = r\cos\theta$$

$$(\{\partial_m x^M\}) = \begin{pmatrix} \sin\theta\ \cos\phi & \sin\theta\ \sin\phi & \cos\theta \\ r\ \cos\theta\ \cos\phi & r\ \cos\theta\ \sin\phi & -r\ \sin\theta \\ -r\ \sin\theta\ \sin\phi & r\ \sin\theta\ \cos\phi & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\{g_{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, r^2, r^2\sin^2\theta) \tag{A.44}$$

$$g = r^4\sin^2\theta$$
$$J = \sqrt{g} = r^2\sin\theta$$
$$(\{h_m\}) = \begin{pmatrix}1 & r & r\sin\theta\end{pmatrix}$$

各種微分演算は次のようになる。

$$\mathsf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\,\boldsymbol{e}_r^u + \frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial\theta}\,\boldsymbol{e}_\theta^u + \frac{1}{r\ \sin\theta}\,\frac{\partial f}{\partial\phi}\,\boldsymbol{e}_\phi^u \tag{A.45}$$

$$\mathsf{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left(\frac{\partial(r^2\ \sin\theta\, A_u^r)}{\partial r} + \frac{\partial(r\ \sin\theta\, A_u^\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial(r\, A_u^\phi)}{\partial\phi}\right)$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 A_u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r\ \sin\theta}\left[\frac{\partial(\sin\theta\, A_u^\theta)}{\partial\theta} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial\phi}\right] \tag{A.46}$$

$$\mathsf{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\left(\frac{\partial(r\ \sin\theta\, A_u^\phi)}{\partial\theta} - \frac{\partial(r\, A_u^\theta)}{\partial\phi}\right)\boldsymbol{e}_r^u\right. \tag{A.47}$$
$$\left. + r\left(\frac{\partial A_u^r}{\partial\phi} - \frac{\partial(r\ \sin\theta\, A_u^\phi)}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\theta^u + r\ \sin\theta\left(\frac{\partial(r\, A_u^\theta)}{\partial r} - \frac{\partial A_u^r}{\partial\theta}\right)\boldsymbol{e}_\phi^u\right] \tag{A.48}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2 \sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\, \frac{\partial f}{\partial \phi}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\, \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} \tag{A.49}$$

[例 A.4] [円柱座標系]　三次元の円柱座標系の変換則は次式で与えられる。

$$\begin{aligned} x &= r\ \cos\phi \\ y &= r\ \sin\phi \\ z &= z \end{aligned} \tag{A.50}$$

$(\{m\}) = (r, \theta, z)$ として、

$$(\{\partial_m x^M\}) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -r\ \sin\phi & r\ \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{A.51}$$

$$(\{g_{mn}\}) = \mathrm{diag}(1, r^2, 1) \tag{A.52}$$

$$\begin{aligned} g &= r^2 \\ J &= \sqrt{g} = r \\ (\{h_m\}) &= \begin{pmatrix} 1 & r & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

各種微分演算は次のようになる。

$$\mathsf{grad}\, f = \frac{\partial f}{\partial r}\, \boldsymbol{e}_r^u + \frac{1}{r}\, \frac{\partial f}{\partial \phi}\, \boldsymbol{e}_\phi^u + \frac{\partial f}{\partial z}\, \boldsymbol{e}_z^u \tag{A.53}$$

$$\mathsf{div}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,A_u^r)}{\partial r} + \frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial(r\,A_u^z)}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{1}{r}\,\frac{\partial(r\,A_u^r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A_u^\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_u^z}{\partial z} \tag{A.54}$$

$$\mathsf{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\left[\left(\frac{\partial A_u^z}{\partial \phi} - \frac{\partial(r\,A_u^\phi)}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_r^u\right.$$

$$\left. + r\left(\frac{\partial A_u^r}{\partial z} - \frac{\partial A_u^z}{\partial r}\right)\boldsymbol{e}_\phi^u + \left(\frac{\partial(r\,A_u^\phi)}{\partial r} - \frac{\partial A_u^r}{\partial \phi}\right)\boldsymbol{e}_z^u\right] \tag{A.55}$$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{1}{r}\,\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial z}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{A.56}$$

付録 B

電磁気学の相対性理論

この章では、本文で割愛した電磁場の四元化を示す。また電磁気学の世界で重要な概念であるポインティングベクトルを四元化し、従来から知られていたマクスウェルの応力テンソルを内包するエネルギー運動量応力テンソルを導出する。エネルギー運動量応力テンソルは、一般相対性理論で重力を作り出す根源とされるもので、極めて重要な概念である。そこで、質点の集合に対する力学的エネルギー運動量応力テンソルを導出し、質点が電磁場から力を受ける際に、電磁的と力学的エネルギー運動量応力テンソルの和が重要な物理量になる可能性があることを示す。

B.1　電磁場の四元化

運動中の荷電粒子に働く**ローレンツ力** (Lorentz force) は次式で与えられる。

$$\underline{\boldsymbol{F}} = Q(\boldsymbol{E} + \underline{\boldsymbol{v}} \times \boldsymbol{B}) \tag{B.1}$$

この式はやや面倒である。まず、$\boldsymbol{E}$ や $\boldsymbol{B}$ などの電磁場は後に示すようにローレンツ変換に対し、きちんと変換される相対論的テンソルの成分である。一方、$\underline{\boldsymbol{v}}$ は明かに古典的なローレンツ変換されない量である。このことから、$\underline{\boldsymbol{F}}$ はガリレイ変換に対してもローレンツ変換に対してもうまく変換されない（厳密にはアンダーラインを付けるべきではない）量である。しかし、全体を γ_v 倍して $\underline{\boldsymbol{v}}$ を四元化すれば、少なくとも右辺は相対論的量となる。こうすると $\boldsymbol{v}$ が四元速度になるだけでなく、右辺第一項の $\gamma_v \boldsymbol{E}$ も、$v^0(\boldsymbol{E}/c)$ と記載できるようになる。

左辺は $\underline{\boldsymbol{F}}\gamma_v$ となるが、これを強制的に相対論的な四元力 $\boldsymbol{F}$ としよう。式 4.51 を利用すると、第四成分は

$$F^0 = (v^1F^1 + v^2F^2 + v^3F^3)/v^0 = (\gamma_v \boldsymbol{v}) \cdot (\gamma_v \boldsymbol{F})/v^0$$
$$= \gamma_v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{F}/c \tag{B.2}$$

により得られる。なお、最後の等号では $v^0 = \gamma_v c$ を利用した。一方、式 B.1 の両辺に $\boldsymbol{v}$ を内積として掛けると、$Q\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}$ の項だけが残ることから、上式は次のように変形できる。

$$F^0 = Q\gamma_v \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{E}/c = Q(v^1E_x/c + v^2E_y/c + v^3E_z/c) \tag{B.3}$$

となる。

これらの結果から、ローレンツ力は次にようにまとめることができる。

$$F^m = QB^m_n v^n \tag{B.4}$$

ここで、F^m と v^n は四元ベクトルの成分、B^m_n は次式で定義される**電磁テンソル** (electromagnetic tensor) と呼ばれる四元テンソルの成分

である。

$$\left(\{B^m_n\}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.5}$$

第 0 行と四元速度の積は、式 B.3 に対応する。また、これから導かれる反変テンソル $B^{mn} = B^m_k g^{kn}$、共変テンソル $B_{mn} = g_{mk} B^k_n$ も、今後使われるので示しておこう。

$$\left(\{B^{mn}\}\right) = \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ -E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ -E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.6}$$

この場合には第 0 列のみが符号反転している。

$$\left(\{B_{mn}\}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & B_z & -B_y \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix} \tag{B.7}$$

この場合には第 0 行のみが符号反転している。B^{mn} も B_{mn} も、反対称テンソルになっていることに注意してほしい。

さて、このテンソルの各成分には電場や磁場の成分が入っているが、電場や磁場は、相対論の世界では、どうやってもベクトルで表現することができず、このように 4 行 4 列のテンソルになってしまうのである。この後に現れるポテンシャルが、簡単なベクトルで表されることを考慮すると、ここでも、ポテンシャルのほうが根源的な量であることを、感じざるを得ない。

電磁場を四元テンソルで表したが、マクスウェル方程式を、この四元の電磁テンソルを使って表してみよう。電荷や電流などの源との関

連の div $\boldsymbol{E}$ 式および rot $\boldsymbol{B}$ 式は、次のようになる。

$$\partial_n B^{mn} = \mu_0 J^m \tag{B.8}$$

ただし、J^m は次式で定義される**四元電流密度** (four current-density) である。

$$\bigl(\{J^m\}\bigr) = (c\rho,\, \boldsymbol{J}) \tag{B.9}$$

一方、源の入っていない rot $\boldsymbol{E}$ 式および div $\boldsymbol{B}$ 式は、やや複雑な表現で与えられる。

$$\partial_k B_{mn} + \partial_m B_{nk} + \partial_n B_{km} = 0 \tag{B.10}$$

やや形式的であるが、この式は**完全反対称テンソル** (antisymmetric tensor) と呼ばれる ε^{mnkl} を使って、アインシュタイン規約の形で書くことも可能であるが、これが $4 \times 4 \times 4 \times 4$ のテンソル*1であることもあり、必ずしも見やすい形ではなため、あくまでも参考のために示す。

$$\varepsilon^{mnkl} \partial_n B_{kl} = 0 \tag{B.11}$$

なお、ε^{mnkl} はサフィックスが $(0, 1, 2, 3)$ のとき 1、サフィックスがこの偶置換で与えられるときも 1、奇置換になっているときは -1、その他では 0 と定義されている。

J^m が四元ベクトルであることに着目して欲しい。特にその第四成分である $c\rho$ が不変量でないことには注意してほしい。ρ は、電荷分布が一様なときには、体積当りの総電荷量であるが、分布電荷が走ると、走行方向に $\sqrt{1-\beta_v^2} = 1/\gamma_v$ 倍のローレンツ収縮が起きるために電荷密度が上昇する。例えば、S 系に電荷分布 ρ のみがあり、それを S$'$ 系で見ると、$\rho' = \gamma_v \rho$ と大きく見えることになる。なお、これはあくまでも、電荷分布についての記述であり、総電荷量 Q については、相対的に移動している系の長さが短縮して見えるため、不変量となるので、注意してほしい。

一方、電流密度の方も、静止時の電荷密度と速度を掛けた値よりもローレンツ収縮分高くなる。つまり、静止時の電荷密度を ρ_0 とすると、J^m は次式で与えられる。

$$J^m = \rho_0 v^m \tag{B.12}$$

電磁テンソルの変換則は次式で与えられる。

$$B^{\mu'}_{\nu'} = \partial^{\mu'}_m B^m_n \partial^n_{\nu'} \tag{B.13}$$

この変換則を利用すると、電場 $\boldsymbol{E}$ や磁場 $\boldsymbol{B}$ の座標変換が計算できる。

$$\left(\{B^{\mu'}_{\nu'}\}\right) = \left(\{\partial^{\mu'}_m B^m_n \partial^n_{\nu'}\}\right) = \left(\{\partial^{\mu'}_m\}\right)$$

$$\begin{pmatrix} -\gamma_v\beta_v E_x/c & \gamma_v E_x/c & \gamma_v(E_y/c - \beta_v B_z) & \gamma_v(E_z/c + \beta_v B_y) \\ \gamma_v E_x/c & -\gamma_v\beta_v E_x/c & \gamma_v(B_z - \beta_v E_y/c) & -\gamma_v(B_y + \beta_v E_z/c) \\ E_y/c & -B_z & 0 & B_x \\ E_z/c & B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & E_x/c & \gamma_v(E_y/c - \beta_v B_z) & \gamma_v(E_z/c + \beta_v B_y) \\ E_x/c & 0 & \gamma_v(B_z - \beta_v E_y/c) & -\gamma_v(B_y + \beta_v E_z/c) \\ \gamma_v(E_y/c - \beta_v B_z) & -\gamma_v(B_z - \beta_v E_y/c) & 0 & B_x \\ \gamma_v(E_z/c + \beta_v B_y) & \gamma_v(B_y + \beta_v E_z/c) & -B_x & 0 \end{pmatrix}$$

これより、電磁場の各成分の変換則は次のようになる。

$$\begin{aligned} B_{x'} &= B_x \\ B_{y'} &= \gamma_v(B_y + \beta_v E_z/c) \\ B_{z'} &= \gamma_v(B_z - \beta_v E_y/c) \end{aligned} \tag{B.14}$$

$$\begin{aligned} E_{x'}/c &= E_x/c \\ E_{y'}/c &= \gamma_v(E_y/c - \beta_v B_z) \\ E_{z'}/c &= \gamma_v(E_z/c + \beta_v B_y) \end{aligned} \tag{B.15}$$

これら電磁テンソルをポテンシャルで表現すると、次式のようになる。

$$B_{mn} = \partial_m A_n - \partial_n A_m \tag{B.16}$$

ここで、A_m の四成分は $(-\phi/c, \boldsymbol{A})$ である。この定義により、式 B.10 は自動的に満たされる。

一方、これを昇階して、式 B.8 に代入すると、次式となる。

$$\partial_n(\partial^m A^n - \partial^n A^m) = \partial^m(\partial_n A^n) - \partial_n \partial^n A^m = \mu_0 J^m \tag{B.17}$$

昇階の結果、$(\{A^m\}) = (\phi/c, \boldsymbol{A})$ である。ここで、次式の条件が満たされるとすると、上式は簡単になる。なお、この条件は、実は**ローレンツ条件 (Lorentz condition)** である。

$$\partial_n A^n = 0 \tag{B.18}$$

簡単になったポテンシャルの式は次のようになる。

$$\partial^n \partial_n A^m = -\mu_0 J^m \tag{B.19}$$

$\partial^n \partial_n = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2 - \partial^2/\partial(ct)^2 = \Box$ であるから、この式は、まさに、**ポテンシャルの波動方程式 (wave equation of potentials)** を相対論的に記述したものである。ここにいたって、ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルは独立した概念ではなく、統合された概念になっていることが理解できよう。このように、相対論の世界では、場の式よりも、ポテンシャルのほうがより簡明な変換を受ける。前述のように、ポテンシャルのほうがより根源的な場である印象を受ける。実際、電磁場の変換関係を覚えるよりは、ポテンシャルの変換を行い、それから電磁場を誘導することを薦める。

なお、上式を x^m で微分すると、左辺は $\partial_m(\partial^n\partial_n A^m) = \partial^n\partial_n(\partial_m A^m) = 0$ となるため、**電流連続の式** (current continuity equation) と呼ばれる次式が得られる。

$$\partial_m J^m = 0 \tag{B.20}$$

B.2　電磁場のエネルギー運動量応力テンソル

荷電粒子の集合である分布した電荷（運動していてもよい）に働く力 $\boldsymbol{f}$ は、ローレンツ力 (Lorentz force) を拡張した次式で与えられる。

$$\boldsymbol{f} = \rho(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) = \rho\,\boldsymbol{E} + \rho\,\boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B} = \rho\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \tag{B.21}$$

この右辺 ρ と $\boldsymbol{J}$ を、$\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}$ 式および $\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}$ 式を利用して、電磁場により書き換える。

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{f} = \rho\,\boldsymbol{E} + \boldsymbol{J} \times \boldsymbol{B} \\
&\quad = \boldsymbol{E}(\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}) - \boldsymbol{B} \times \left(\frac{1}{\mu_0}\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}\right) + \boldsymbol{B} \times \frac{\partial \varepsilon_0 \boldsymbol{E}}{\partial t} \\
&\quad = \varepsilon_0\boldsymbol{E}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{E}) - \varepsilon_0\boldsymbol{E} \times (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{E}) + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{B}) - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B} \times (\mathrm{rot}\,\boldsymbol{B}) \\
&\quad + \varepsilon_0\boldsymbol{B} \times \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t} - \varepsilon_0\boldsymbol{E} \times \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \\
&\quad = \boldsymbol{e}_x\left\{\varepsilon_0\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(E_x^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{E}^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(E_xE_y) + \frac{\partial}{\partial z}(E_xE_z)\right]\right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(B_x^2 - \frac{1}{2}\boldsymbol{B}^2\right) + \frac{\partial}{\partial y}(B_xB_y) + \frac{\partial}{\partial z}(B_xB_z)\right]\right\} \\
&\quad + \boldsymbol{e}_y[\cdots] + \boldsymbol{e}_z[\cdots] - \varepsilon_0\frac{\partial}{\partial t}(\boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B}) \\
&\quad = \boldsymbol{e}_x\sum_m \frac{\partial T_{\mathrm{EM}}^{mx}}{\partial x^m} + \boldsymbol{e}_y\sum_m \frac{\partial T_{\mathrm{EM}}^{my}}{\partial x^m} + \boldsymbol{e}_z\sum_m \frac{\partial T_{\mathrm{EM}}^{mz}}{\partial x^m} - \frac{\partial \boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{B.22}$$

ここで三番目の等号は、$\varepsilon_0 \boldsymbol{E}$ と rot $\boldsymbol{E}$ 式の外積と、$\boldsymbol{B}/\mu_0$ と div $\boldsymbol{B}$ 式の内積を利用して変形している。また T^{mn}_{EM} と $\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ は次のように定義される。なお、サフィックス EM は電磁気的（electro-magnetic）量を意味する。

$$T^{mn}_{\mathrm{EM}} = \varepsilon_0 \left(E_m E_n - \delta_{mn} \frac{\boldsymbol{E}^2}{2} \right) + \frac{1}{\mu_0} \left(B_m B_n - \delta_{mn} \frac{\boldsymbol{B}^2}{2} \right) \tag{B.23}$$

$$\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}} = \varepsilon_0 \boldsymbol{E} \times \boldsymbol{B} \tag{B.24}$$

である。

この力は電磁場が荷電粒子系に与える力学的運動量 $\boldsymbol{g}_{\mathrm{K}}$ の増加率であると見ることもできる。サフィックス K（立体）は力学的（kinetic）な量であることを示している。したがって、上式は次のように書き換えられる。

$$\frac{\partial \boldsymbol{g}_{\mathrm{K}}}{\partial t} = \mathrm{div}\, T_{\mathrm{EM}} - \frac{\partial \boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}}{\partial t} \tag{B.25}$$

ここで、三元テンソル（行列）T_{EM} は**マクスウェル応力テンソル** (Maxwell stress tensor)、$\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ は**電磁場の運動量** (momentum of electro-magnetic field) と呼ばれている。T_{EM} がテンソルであるため、div は grad でも div でもないことに注意してほしい。div$T$ の本当の意味を理解するためには、元の式 B.23 に立ち返るべきである。

この式の両辺をある体積で体積積分すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathrm{V}} dV (\boldsymbol{g}_{\mathrm{K}} + \boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}) = \oint_{\mathrm{S}} d\boldsymbol{S} \cdot T_{\mathrm{EM}} \tag{B.26}$$

これから、力が運動量の増加を引き起こすことが分かるが、力が電磁気的な**応力** (stress) という形で与えられること、運動量には $\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ なる電磁気的運動量を含んでいることを理解してほしい。

応力というと苦手な人が多いかとも思うが、要は、空間に小さな直方体を切り取ったときに、yz 面に働く力が $(T_{\rm EM}^{xx}, T_{\rm EM}^{yx}, T_{\rm EM}^{zx})$ になると理解すればよい。例えば $T_{\rm EM}^{xx}$ は面を垂直に押す**垂直応力** (normal stress) であるが、正のときは**引張応力** (tensile stress)、負のときには**圧縮応力** (compressive stress) となる。また非対角要素 $T_{\rm EM}^{yx}$ などは、面を横方向にずらす**せん断力** (shear stress) となる。それにしても $T_{\rm EM}$ の要素が複雑である。こうしたときには、この行列の固有値問題を解いて、主軸変換するとよい。

まず、静的な場合を考えよう。磁場のない電場のみの場合のテンソルを主軸変換してみよう。すると、主軸は $\boldsymbol{E}$ の方向にあり、その方向の固有値は $\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2/2$ となる。また、第二、第三の主軸はこれと直交しており、その方向の固有値は縮退していて、$-\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2/2$ となる。これから、$\boldsymbol{E}$ の方向に垂直の面は $\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2/2$ の引張応力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も $\varepsilon_0\boldsymbol{E}^2/2$ の圧縮応力を受けることが分かる。また、せん断応力は消え失せる。この理由により、電気力線はその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すといわれる。電気力線は、電荷を始点や終点にするから、電荷に働く力は、電気力線の引張応力で説明できることになる。例えば、導体上の電荷は常に外向きに引力を受けるが、それはこの電気力線の引張応力で理解できる。また微小サイズの正電荷が負電荷に引かれる様子は、正電荷表面の電気力線の密度が、負電荷側で高いことから、視覚的に理解できる。また、導体表面で、同種の電荷同士は横向きに押し合っており、それが故に、電荷は一様に分布するのであるが、それが電気力線の横向きの圧縮応力に繋がるのである。

同様に、電場のない磁場のみの場合のテンソルを主軸変換すると、$\boldsymbol{B}$ の方向に垂直の面は $\boldsymbol{B}^2/2\mu_0$ の引張応力を受け、それと垂直ないずれの方向の面も $\boldsymbol{B}^2/2\mu_0$ の圧縮応力を受けることが分かる。この

理由により、磁力線もその方向に縮もうとし、その垂直方向に膨らもうという力を出すといわれる。磁力線は電流を囲むように生成されるから、電流に働く力は、磁力線に垂直な圧縮応力で説明できることになる。例えば、同方向に流れる電流同士が互いに引かれる様子は、これらが作る磁力線が電流の線の間で疎であり、外部で密であることから、視覚的に理解できる。

次に、動的な場合を考察しよう。この場合には、$\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ の時間微分が効いてくるため、電荷や電流に働く力はマクスウェル応力だけでは説明できなくなる。積分形の体積をきわめて巨大にしていくと、遠方では場が弱くなっていくため、その表面積分である応力の項は消えていくだろう。残った項は、力と電磁場の運動量の時間微分に関わるものである。通常は、力の体積積分は、作用反作用の法則で 0 になることが期待できるが、そうはなっていない。つまり、作用反作用の法則は成立しないのである。その差は、$\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ の時間微分により説明できるのである。力の時間積分は運動量である。このため $\boldsymbol{g}_{\mathrm{EM}}$ は電磁場の運動量と呼ばれるのである。

続いて、電磁場が荷電粒子系に与えるエネルギーについて検討しよう。ローレンツ力の式の両辺に $\boldsymbol{v}$ を内積の形で掛けると、磁界の項は消去され、次式が得られる。

$$\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{v} = Q\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{v} \tag{B.27}$$

これから分布電荷に対する式として次式が得られる。

$$\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v} = \boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{J} \tag{B.28}$$

この右辺の $\boldsymbol{J}$ を電磁場で置き換えてみよう。

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{E}\cdot\left(\frac{1}{\mu_0}\operatorname{rot}\boldsymbol{B} - \varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right) \\
&= \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{B} + \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\operatorname{rot}\boldsymbol{E} - \varepsilon_0\boldsymbol{E}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t} - \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{B}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t} \\
&= -\frac{1}{\mu_0}\operatorname{div}(\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}) - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 - \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2\right) \\
&= -\operatorname{div}\boldsymbol{S} - \frac{\partial U_{\mathrm{EM}}}{\partial t}
\end{aligned} \tag{B.29}$$

ここで、二番目の等号は、$\boldsymbol{B}/\mu_0$ と $\operatorname{rot}\boldsymbol{E}$ 式の内積を利用して変形されている。ただし、$\boldsymbol{S}$ と U_{EM} は次式で定義される。

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{\mu_0}\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B} \tag{B.30}$$

$$U_{\mathrm{EM}} = U_{\mathrm{E}} + U_{\mathrm{M}} = \frac{\varepsilon_0}{2}\boldsymbol{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0}\boldsymbol{B}^2 \tag{B.31}$$

ここで、$\boldsymbol{S}$ はポインティングベクトル (Poynting vector) と呼ばれる。また、U_{EM} は単位体積当たりの**電磁場のエネルギー** (energy of electo-magnetic field) である。第一項は**電気エネルギー** (electric energy)U_{E}、第二項は**磁気エネルギー** (magnetic energy)U_{M} である。

左辺は分布電荷の持つ運動エネルギー U_{K} の単位時間当たりの増加量であるので、次のようにまとめることができる。

$$\frac{\partial U_{\mathrm{K}}}{\partial t} = -\operatorname{div}\boldsymbol{S} - \frac{\partial U_{\mathrm{EM}}}{\partial t} \tag{B.32}$$

体積積分をとり、適当に移項すると、電流連続の式と似た次式が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathrm{V}} dV(U_{\mathrm{K}} + U_{\mathrm{EM}}) = -\oint_{\mathrm{S}} d\boldsymbol{S}\cdot\boldsymbol{S} \tag{B.33}$$

これから、ポインティングベクトルの発散積分が、囲んだ体積の内部のエネルギーの減少になることがいえるが、エネルギーには U_{EM} なる電磁場エネルギーを含んでいることを理解してほしい。つまり、ポインティングベクトルはエネルギーの流れであり、単位面積当たり、単位時間に流れるエネルギーといえる。

続いて、以上の議論を相対論的に扱ってみよう。式 B.21、B.27 を四元ベクトルでまとめると次のようになる。

$$f^m = B^m_n J^n \tag{B.34}$$

ただし $(\{f^m\}) = (\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{v}/c,\ \boldsymbol{f})$ とした。この右辺の J^n を、式 B.8 を利用して場で置き換える。

$$f^m = \frac{1}{\mu_0} B^m_n \partial_k B^{nk} \tag{B.35}$$

すると、この式の右辺は次式のように変形できる。

$$f^m = -\partial_n T^{mn}_{\mathrm{EM}} \tag{B.36}$$

ただし、T^{mn}_{EM} は次式で定義される（EM は電磁場の意味）。

$$T^{mn}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{\mu_0}\left(B^m_k B^{kn} - \frac{1}{4} g^{mn} B^{ij} B_{ji}\right) \tag{B.37}$$

その証明は以下のようである。

$$\begin{aligned} -\partial_n\left(\mu_0 T^{mn}_{\mathrm{EM}}\right) = B^m_k \partial_n B^{kn} + B^{kn} \partial_n B^m_k \\ - \frac{1}{4} g^{mn}\left(B^{ij} \partial_n B_{ji} + B_{ji} \partial_n B^{ij}\right) \end{aligned} \tag{B.38}$$

まず右辺の第一項はそのまま手をつけず、第二項を変形する。

$$\begin{aligned} B^{kn} \partial_n B^m_k &= g^{ml} B^{kn} \partial_n B_{lk} = \frac{1}{2} g^{ml}\left(B^{kn} \partial_n B_{lk} + B^{kn} \partial_n B_{lk}\right) \\ &= -\frac{1}{2} g^{ml}\left(B^{ij} \partial_i B_{lj} + B^{ij} \partial_j B_{il}\right) \end{aligned}$$

ここで、この式の二つ目の等号であるが、第一項については $B^{kn} \to -B^{nk}$ とし、$n \to i$、$k \to j$ と置き直している。また、第二項については $k \to i$、$n \to j$ と置き直し、さらに $B_{li} \to -B_{il}$ としている。

式 B.38 の第三項は、次式のように変形できる。

$$
\begin{aligned}
-\frac{1}{4}g^{mn}\left(B_{ij}\partial_n B^{ji} + B^{ji}\partial_n B_{ij}\right) &= -\frac{1}{4}g^{ml}\left(B_{ij}\partial_l B^{ji} + B^{ji}\partial_l B_{ij}\right) \\
&= -\frac{1}{2}g^{ml}B^{ij}\partial_l B_{ji}
\end{aligned}
$$

ここで、まず最初の等号で、$n \to l$ と置き換える。二番目の等号では、第一項のほうは B_{ij} の昇階と B^{ji} の降階を同時に行うことで、g が残らないようにしている。第二項のほうは i と j を入れ替えている。この結果、両項は一致し、1/4 は 1/2 となる。

こうして得られた式 B.38 の第二項と第三項の和は、式 B.10 より 0 であることがわかるので、次の結果が得られる。

$$
\partial_n(\mu_0 T^{mn}_{\mathrm{EM}}) = -B^m_k \partial_n B^{kn} \tag{B.39}
$$

これで証明は終りである。

式 B.37 の B^m_k を昇階すると、次式が得られる。

$$
T^{mn}_{\mathrm{EM}} = -\frac{1}{\mu_0}\left(B^{ml}g_{lk}B^{kn} - \frac{1}{4}g^{mn}B_{ij}B^{ji}\right) \tag{B.40}
$$

さて式 B.36 の右辺の $\partial_n T^{mn}_{\mathrm{EM}}$ は、式 B.25 や式 B.32 の右辺と深い関係を持っているのは明かであり、これらの対応から、$(\{T^{mn}_{\mathrm{EM}}\})$ の各項を古典的な手法で導きだした応力テンソル T^{mn}_{EM}、電磁場の運動量 g^m_{EM}、ポインティングベクトル S^m、および電磁場のエネルギー U_{EM} などで表わすのはたやすい。

$$
(\{T^{mn}_{\mathrm{EM}}\}) = \begin{pmatrix}
U_{\mathrm{EM}} & S^x/c & S^y/c & S^z/c \\
cg^x_{\mathrm{EM}} & -T^{xx} & -T^{xy} & -T^{xz} \\
cg^y_{\mathrm{EM}} & -T^{yx} & -T^{yy} & -T^{yz} \\
cg^z_{\mathrm{EM}} & -T^{zx} & -T^{zy} & -T^{zz}
\end{pmatrix} \tag{B.41}
$$

この関係から、四元テンソル $(\{T_{\rm EM}^{mn}\})$ は電磁場の**エネルギー運動量応力テンソル** (energy-momentum-stress tensor) と呼ばれる。以下、エネルギー運動量応力テンソルを単に**応力テンソル** (stress tensor) と呼ぼう。

$(\{T_{\rm EM}^{mn}\})$ は対称テンソルなので $S^m/c = cg_{\rm EM}^m$ となる。つまり次式が成立する。

$$\boldsymbol{S} = c^2\boldsymbol{g}_{\rm EM} \tag{B.42}$$

この比例関係は、質量 0 で光速で運動する粒子の流れの場合に常に成立する関係である。つまり、電磁場は質量 0 で光速で運動する粒子流と見なせることを示している。

B.3　力学的エネルギー運動量応力テンソル

続いて、電磁場から力を受ける荷電粒子系側の運動量やエネルギーの変化について考えよう。第 4 章の式 4.54 は $T^{mn} = \mu_0 v^m v^n$ となっているが、我々は個々の荷電粒子に対するローレンツ力を知っているので、それとの対応をとるために、この右辺を個々の粒子に対する量の総和に置き換える。

$$T_{\rm K}^{mn} = \sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i v_i^m(\tau_i) v_i^n(\tau_i)\delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \tag{B.43}$$

ここで、i は粒子に付けられた番号である。ちょっと読みづらいが、質量 m_i があり、現在の座標 $(ct_i(\tau), x_i(\tau), \cdots)$ を中心とする狭い領域に分布している。これを $c\tau$ を変えることにより、運動軌跡に沿って積分するという意味である。狭い領域での分布は、その領域を縮めることにより $\delta(ct - ct_i(\tau))\delta(x - x_i(\tau))\cdots = \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau))$ に変形できるので、上式が得られる。したがって、このテンソルは粒子系の力

学的な応力テンソルである。

この両辺を x_m で微分してみよう。

$$\begin{aligned}
\partial_m T_{\mathrm{K}}^{mn} &= \sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^m(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{dx_i^n(\tau_i)}{d\tau_i} \partial_m \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \\
&= -\sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^n(\tau_i)}{d\tau_i} \frac{\partial}{\partial \tau_i} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} m_i c \int d\tau_i \frac{d^2 x_i^n(\tau_i)}{d\tau_i^2} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N} Q_i c \int d\tau_i B_k^n(\boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \frac{dx_i^k(\tau_i)}{d\tau_i} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \\
&= B_k^n(\boldsymbol{x}) \sum_{i=1}^{N} Q_i c \int d\tau_i \frac{dx_i^k(\tau_i)}{d\tau_i} \delta(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_i(\tau_i)) \\
&= B_k^n J^k
\end{aligned} \tag{B.44}$$

二行目の等号は $\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/\partial x^n = -\partial\delta(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})/\partial y^n$ を利用している。三行目の等号は部分積分を利用している。4 行目は荷電粒子の加速度をローレンツ力へ置き換えている。以下は容易に推定できると思う。

式 B.34 と式 B.36 から、

$$B_k^n J^k = -\partial_m T_{\mathrm{EM}}^{mn} \tag{B.45}$$

が得られる。式 B.45 と式 B.44 を連立すると次式が導かれる。

$$\partial_m T^{mn} = 0 \tag{B.46}$$

ここで $(\{T^{mn}\})$ は、次式で定義される**全エネルギー運動量応力テンソル** (total energy-momentum-stress tensor) である。

$$T^{mn} = T_{\mathrm{K}}^{mn} + T_{\mathrm{EM}}^{mn} \tag{B.47}$$

これにより、**エネルギー運動量保存則** (energy-momentum conservation law) が成立することが理解できよう。

索引

■ D

■ E

■ F

■ G

■ I

■ J

■ K

■ L

■ M

■ あ

■ か

■ さ

◉著者略歴

岡部 洋一（おかべ よういち）

1943年　東京都生まれ
1967年　東京大学工学部卒業
1972年　東京大学大学院工学系研究科修了（工学博士）
1972年より，東京大学講師，助教授，教授
1999年より，東京大学先端科学技術研究センター長，情報基盤センター長等
2006年より，放送大学教授，副学長，理事
2011年より，放送大学長
専攻　電子工学・情報工学

主な著書『絵でわかる半導体と IC』（日本実業出版）
『素人の書いた複式簿記』（オーム社）
『コンピュータのしくみ』（放送大学教育振興会）
『電磁気学の意味と考え方』（講談社）
『ソフトウェアのしくみ』（放送大学教育振興会）

リーマン幾何学と相対性理論

2014年10月23日　第1版第1刷発行

著　者　岡部　洋一
発行者　麻畑　　仁
発行所　㈲プレアデス出版
〒399-8301　長野県安曇野市穂高有明7345-187
TEL 0263-31-5023　FAX 0263-31-5024
http://www.pleiades-publishing.co.jp
装　丁　松岡　　徹
印刷所　亜細亜印刷株式会社

落丁・乱丁本はお取り替えいたします。定価はカバーに表示してあります。
ISBN978-4-903814-69-8　C3042　　Printed in Japan